Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2010. március 5.

1 dimenziós mozgások, rezgések

Konzervatív rendszerek egy dimenzióban

energiamegmaradás:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V$$

megmarad, ugyanis

$$\dot{E} = m \ddot{x} \dot{x} + V'(x) \dot{x}$$

az erőtörvény: $F = -V'(x)$ $\quad (1D: \nabla V = V')$ $\quad m\ddot{x} = F$

$$\dot{E} = (-V'(x)) \dot{x} + V'(x) \dot{x} = 0$$

tehát $E =$ áll., nem változik időben;

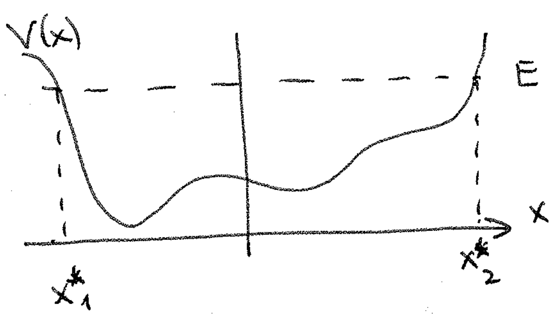
Tekintsük most az

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V = E = \text{áll.}$$

egyenletet: ez $|\dot{x}|$-et megadja x függvényében

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - V(x))$$

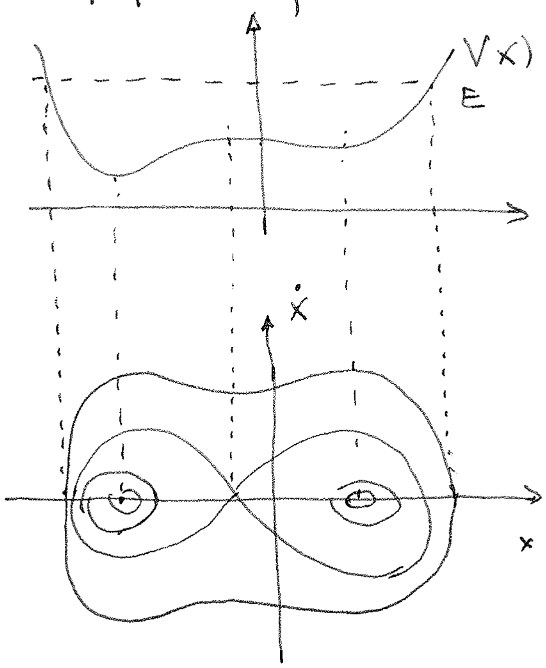
$$|\dot{x}| = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}$$



amit már most látunk:

- a részecske ott mozog, ahol $E > V(x)$
- $E = V(x^*)$: fordulópontok

ha $|\dot{x}|$ adott, mint x függvénye : görbék az $\dot{x} - x$ síkon



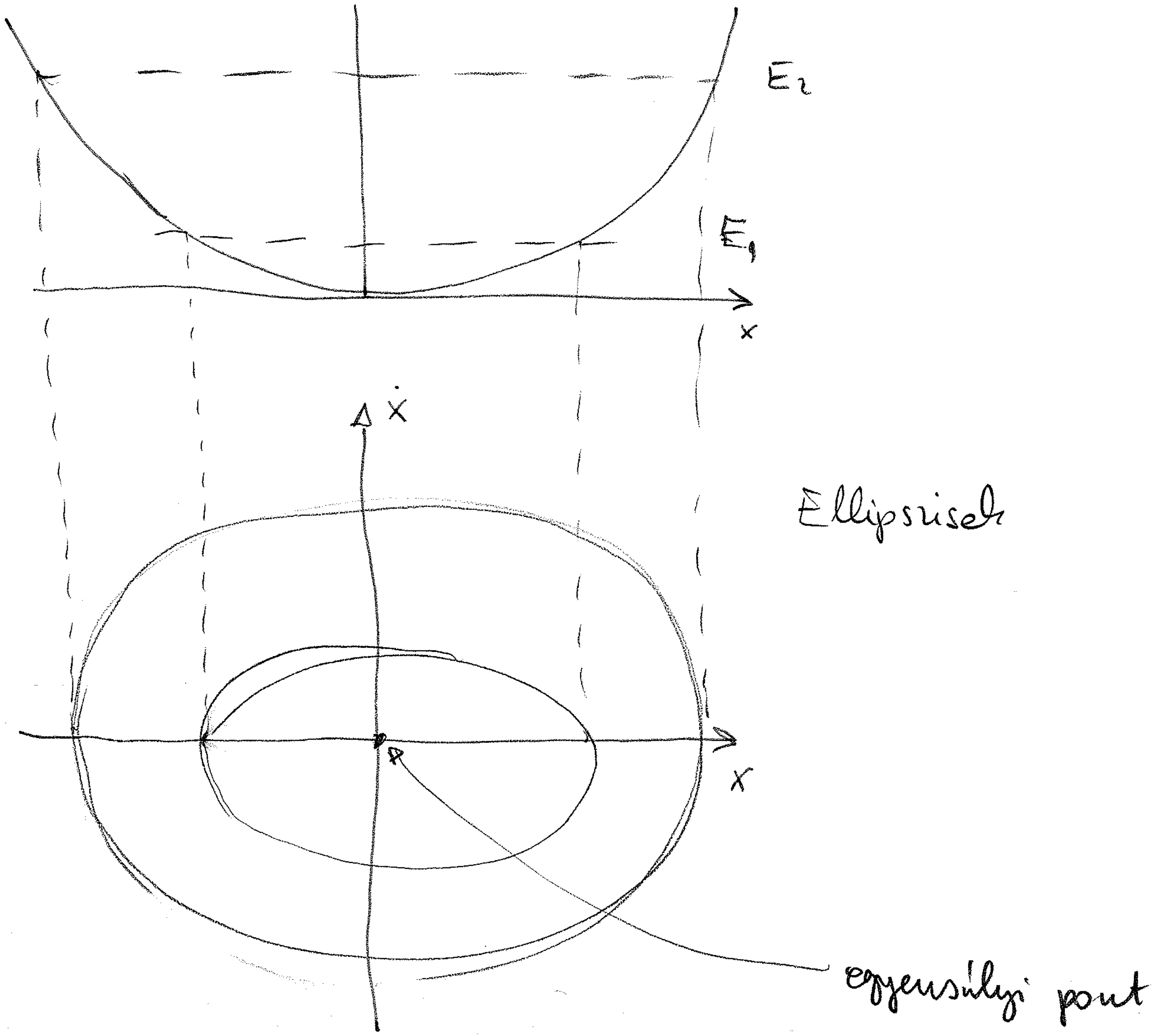
→ konstans E görbék

egyensúlyok és egyensúly körüli kis rezgések

<u>fázistér - ábra</u>

az $\dot{x} - x$ sík: <u>fázistér</u>

1. <u>Példa:</u> rajzoljuk meg a harmonikus oszcillátor fázistér-ábráját



Az energiamegmaradás alkalmazása:

$$|\dot{x}| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

két fordulópont között ismerjük $\dot{x}$ előjelét:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

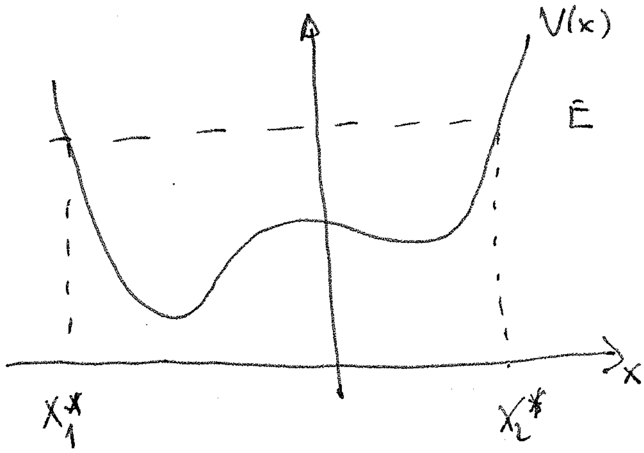
$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \pm\, dt$$

integrálva:

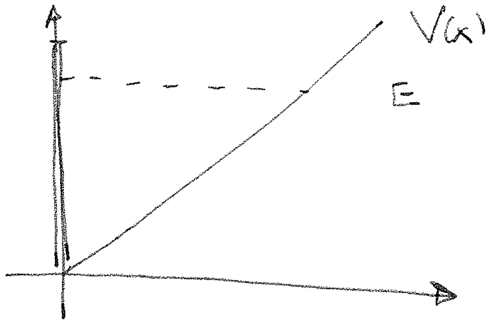
$$t_1 - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

alkalmazható pl. periódusidő számolására: x_1^*, x_2^* két fordulópont: az utat kétszer teszi meg 1 periódusban (1x oda – 1x vissza)

$$T = 2\int_{x_1^*}^{x_2^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$



2. Példa:



$$V(x) = \begin{cases} Fx & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

$F > 0$ paraméter (állandó)

fizikai kép: $x=0$-ban mindig visszapattan

Számoljuk ki ennek a periódusidejét!

Megoldás: a fordulópontok:

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = \frac{E}{F}$$

$$T = 2\int_{x_1^*}^{x_2^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2\int_0^{E/F} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - Fx)}}$$

változócsere: $\xi = \frac{2}{m}(E - Fx)$

$$d\xi = -\frac{2F}{m}\,dx \quad \leftarrow \text{meg kell fordítani}$$

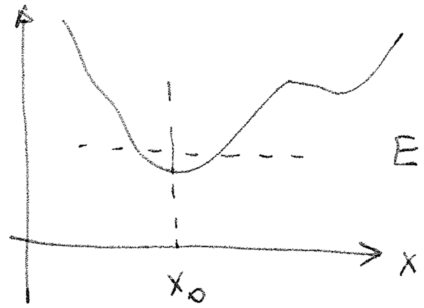
$$\xi_1^* = \frac{2}{m}(E - Fx_1^*) = \frac{2E}{m}$$

$$\xi_2^* = \frac{2}{m}(E - Fx_2^*) = 0$$

$$T = 2\int_{\xi_2^*}^{\xi_1^*} \frac{d\xi / \frac{2F}{m}}{\sqrt{\xi}} = \frac{2m}{F}\int_0^{2E/m} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}} = \frac{2m}{F}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{\sqrt{8Em}}{F}$$

$$\left(\sqrt{\xi}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

Egyensúly körüli kis rezgések



x_0 legyen a potenciál egy lokális minimuma

$$\Rightarrow \quad V'(x_0) = 0 \qquad V''(x_0) > 0$$

(itt most csak a $V''(x_0) > 0$ esettel foglalkozunk)

ha $V'(x_0) = 0$ akkor a mozgásegyenletből

$$m\ddot{x} = -V'(x)$$

ha $t = 0$ -ban $x = x_0$ $\dot{x} = 0$ akkor

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m} V'(x_0) = 0$$

adódik $\rightarrow$ x_0 egyensúlyi pont

x_0 körül a potenciál

$$V(x) \approx V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{0}(x - x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2$$

az erő

$$F(x) \approx -\underbrace{V''(x_0)}_{k}(x - x_0)$$

a mozgásegyenlet $\hat{x} := x - x_0$ változóban

$$m\ddot{\hat{x}} \approx -k\hat{x}$$

ez harmonikus rezgést ír le, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ körfrekv.

tehát:

minimum : $V''(x_0) > 0$; $\omega^2 = \frac{k}{m} > 0$ vesz

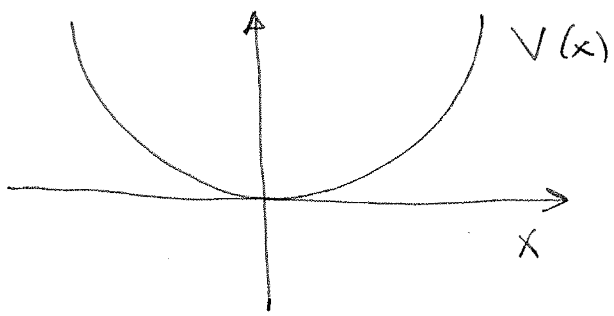
stabil egyensúly

ha maximum : $V''(x_0) < 0$ instabil egyensúly

3. Példa : vizsgáljuk meg a $V(x) = \frac{\beta}{2} x^4 + \gamma x^2 + \delta$ potenciált! Legyen $\beta > 0$

Megoldás :

ha $\gamma > 0$ akkor



ilyenkor egy minimum van: $V'(x) = 2\beta x^3 + 2\gamma x$

$x_0 = 0$ $\quad V'(x_0) = 0$

$$V''(x) = 6\beta x^2 + 2\gamma$$

$$V''(x_0) = 2\gamma > 0$$

tehát ez stabil egyensúly, ilyenkor

$$\omega^2 = \frac{2\gamma}{m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}}$$

körfrekvenciával rezeghet a tömegpont x_0-ban

Ha $\gamma < 0$: legyen $\eta^2 = -\frac{\gamma}{\beta} > 0$

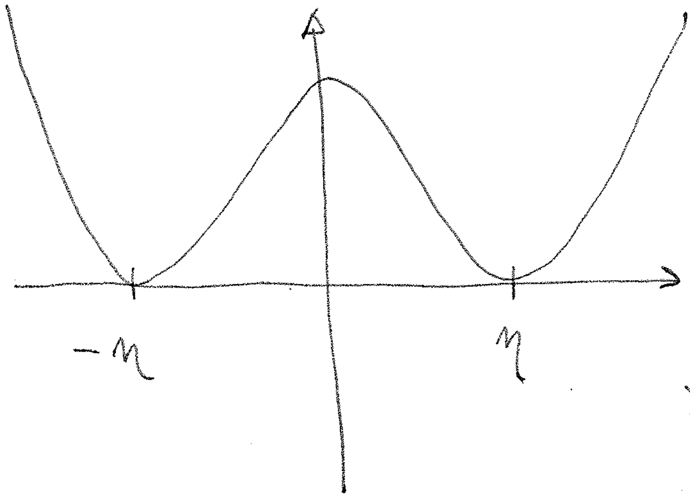
ezzel

$$V(x) = \frac{\beta}{2}(x^2-\eta^2)^2 + \text{konst.}$$

mi. $\frac{\beta}{2}(x^2-\eta^2)^2 = \frac{\beta}{2}x^4 - \beta\eta^2 x^2 + \ldots = \frac{\beta}{2}x^4 - \gamma x^2 + \ldots$

a potenciál (a konstansokat elhagyva) $\frac{\beta}{2}(x^2-\eta^2)^2$

$|x| = \eta$-ban 0, mindenütt máshol pozitív



$$V'(x) = 2\beta(x^2-\eta^2)x$$

$$V'(\pm\eta) = 0 \qquad V'(0) = 0$$

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = -\eta \qquad x_2 = \eta$$

egyensúlyok

$$V''(x) = 2\beta(x^2-\eta^2) + \underbrace{2\beta x\, 2x}_{2\beta\, 2x^2} = 2\beta(3x^2-\eta^2)$$

$$V''(0) = -2\beta\eta^2 = -2\beta\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right) = 2\gamma < 0$$

ez tehát instabil egyensúly

$$V''(\pm\eta) = 2\beta(3\eta^2-\eta^2) = 4\beta\eta^2 = 4\beta\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right) = -4\gamma > 0$$

ez stabil, $\omega^2 = \sqrt{-\frac{4\gamma}{m}}$

érdekesség: a két eset határa

a $\gamma = 0$

ilyenkor, ha $\gamma \to 0$ $\omega^2 \to 0$ mindkét esetben

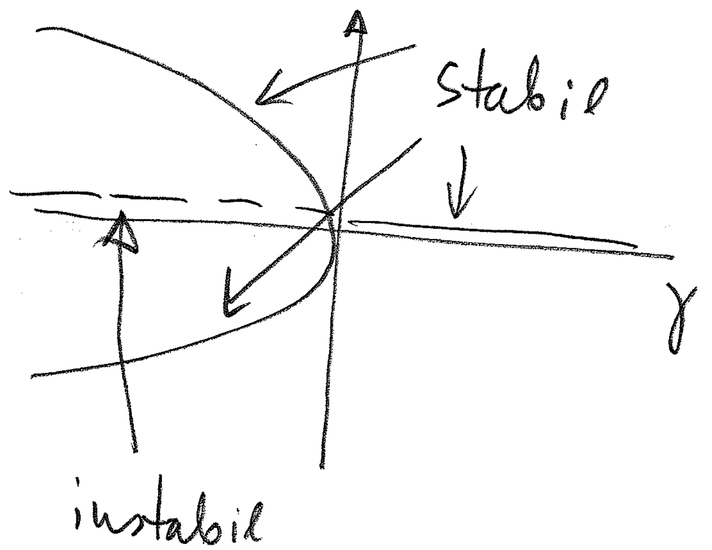
periódusidő: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

ha $\gamma \to 0$ $T \to \infty$ mindkét esetben;

a potenciál "kisimul"

$\gamma \to 0$: $\eta^2 = -\frac{\gamma}{\beta} \to -0$

<u>Bifurkáció</u>: egyensúlyi helyzet:



stabilitás változásakor $T = \frac{2\pi}{\omega} \to \infty$