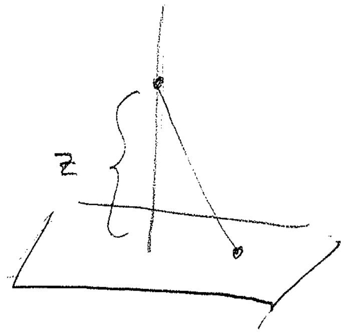
Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2010. ápr. 9. ①

1.) Gömbi inga — HF3.) megoldása

$$L = K - V \qquad K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$



$$V = -mgz$$

kényszerfeltétel: $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$

tudjuk, hogy $z > 0$ (az inga lefelé lóg)

$$z^2 = \ell^2 - x^2 - y^2$$

$$z = \sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x)$$ hasonlóan

$$= -\frac{x}{\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}}$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{\ell^2 - x^2 - y^2}\right) + mg\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}$$

Euler-Lagrange egyenletek innen egyszerű deriválással.

Linearizált mozgásegyenletek: ekvivalens azzal, ha a Lagrange-fv-ben a legfeljebb kvadratikus tagokat tartjuk meg (a deriválás 1-el csökkenti a fokszámot)

$$L \approx \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgl - m\frac{g}{l}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$$

mi:

$(x\dot{x} + y\dot{y})^2 = x^2\dot{x}^2 + \dots$ csupa negyedrendű tag $\to$ elhagyjuk

$$\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = l\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}} \approx l\left(1 - \frac{x^2}{2l^2} - \frac{y^2}{2l^2}\right) = l - \frac{x^2}{2l} - \frac{y^2}{2l}$$

a Lagrange-függvényben az mgl konstanstól a mozgásegyenletek nem függnek, így ekvivalens

$$L' = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m \frac{g}{l} (x^2 + y^2)$$

ez harmonikus rezgés x-ben és y-ban is, mi

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt} p_x = m\ddot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -m\frac{g}{l}x$$

E-L-egy.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + m\frac{g}{l}x = 0$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{g}{l}x}$$

teljesen hasonlóan

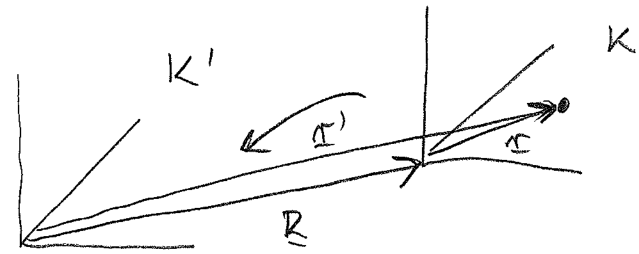
$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{d}{dt} p_y = m\ddot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -m\frac{g}{l}y$$

E-L-egyenlet: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + m\frac{g}{l}y = 0$

$$\boxed{\ddot{y} = -\frac{g}{l}y}$$

Valóban visszakaptuk a már ismert egyenleteket.

2.) Szögsebességvektor



számoljuk ki $\underline{\omega}$-t a két koordinátarendszert összekapcsoló forgásmátrixból!

Megoldás: $\underline{r}$: a pont helyvektora $\underline{K}$-ban

$\underline{r}'$: K'-ben

ekkor: $\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r} + \underline{R}$

$\underline{\underline{A}}$ forgásmátrix

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(t)$

$\underline{R}$: K' origójából K origójába mutat

$\underline{R} = \underline{R}(t)$

a sebesség tehát: szorzat deriváltja

$$\underbrace{\dot{\underline{r}}'(t)}_{\underline{v}'(t)} = \dot{\underline{\underline{A}}}(t)\,\underline{r}(t) + \underline{\underline{A}}(t)\,\underbrace{\dot{\underline{r}}(t)}_{\underline{v}(t)} + \underbrace{\dot{\underline{R}}(t)}_{\underline{V}(t)}$$

az előadáson $\underline{v}' = \underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{\underline{A}}\,\underline{v} + \underline{V}$

szerepelt – mi lehet a kettő között a kapcsolat?

Mit "tud" egy forgásmátrix? Megtartja a skalárszorzatot:

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{x}) \cdot (\underline{\underline{A}}\,\underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y} \quad \text{minden } \underline{x}, \underline{y} \text{ vektorra}$$

$$\| $$

$$\underline{x} \cdot \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

ez akkor teljesül, ha

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}}$$

mi következik ebből?

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$$

deriváljuk ezt az egyenletet!

$$(\dot{\underline{\underline{A}}})^T \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T \dot{\underline{\underline{A}}} = 0$$

vegyük észre, hogy $\left((\underline{\underline{A}}^T)\dot{\underline{\underline{A}}}\right)^T = \dot{\underline{\underline{A}}}^T \underline{\underline{A}}$

tehát ez az $\underline{\underline{A}}^T \dot{\underline{\underline{A}}}$ mátrix antiszimmetrikus.

Fejezzük ki az

$$\dot{\underline{r}}' = \dot{\underline{\underline{A}}}\,\underline{r} + \underline{\underline{A}}\,\dot{\underline{r}} + \underline{V}$$

egyenletben $\underline{r}$-et $\underline{r}'$-vel : $\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r} \Rightarrow \underline{r} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{r}' = \underline{\underline{A}}^T \underline{r}$

$$\dot{\underline{r}}' = \underbrace{\dot{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{A}}^T}_{\underline{\underline{\Omega}}}\,\underline{r}' + \underline{\underline{A}}\,\dot{\underline{r}}$$

$\boxed{\text{az egyszerűség kedvéért legyen } \underline{R} = 0}$

$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{A}}^T \qquad \underline{\underline{\Omega}}^T = -\underline{\underline{\Omega}}$ ez jó, de hogy lesz

ebből $\underline{\omega} \times \underline{r}'$?

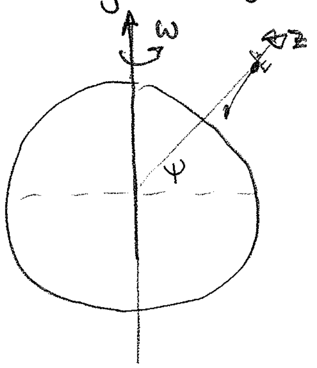
$$\underline{\omega} \times \underline{r}' = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z' - \omega_z y' \\ \omega_z x' - \omega_x z' \\ \omega_x y' - \omega_y z' \end{pmatrix}$$

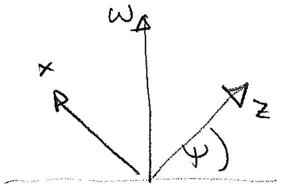
lineáris leképezés — felírható a mátrixa

$$\underline{\omega} \times \underline{r}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

éppen egy antiszimmetrikus mátrix! Ez $\underline{\underline{\Omega}}$.

3.) Inga – írjuk le egy, a forgó Földön felfüggesztett gömbi inga mozgását (Foucault-inga)!





Megoldás: a csak a grav. erőtérben mozgó gömbi inga mozgásegyenlete

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x \qquad \ddot{y} = -\frac{g}{l}y$$

Ennek a jobb oldalához kell hozzáadnunk még a forgó koord. rsz.-ben fellépő inerciaerőket (m-mel elosztva):

$\frac{1}{m}F_{cf} = -\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) \sim \omega^2$, kicsi $\qquad F_C = 2m\,\dot{\underline{r}}\times\underline{\omega}$ Coriolis

centrifugális $\qquad F' = \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r} = 0 \quad (\dot{\underline{\omega}} = 0)$

tehát csak a Coriolis-erő kell; $\underline{\omega}$ vektor a jobboldali ábra szerint $\underline{\omega} = \omega(0, \cos\Psi, \sin\Psi)$

$$\dot{\underline{r}}\times\underline{\omega} = \omega\begin{pmatrix} \dot{y}\sin\Psi - \dot{z}\cos\Psi \\ \dot{z}\cdot 0 - \dot{x}\sin\Psi \\ \dot{x}\sin\Psi - \dot{y}\cdot 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x + 2w\dot{y}\sin\Psi \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y - 2w\dot{x}\sin\Psi \end{aligned}$$

x és y keveredik, mint a forgásnál!

Vegyünk fel egy (x,y)-hoz képest $-w_1$ szögsebességgel z körül forgó koordinátarendszert!

$$x = x'\cos w_1 t + y'\sin w_1 t$$
$$y = y'\cos w_1 t - x'\sin w_1 t$$

$$\dot{x} = \dot{x}'\cos w_1 t + \dot{y}'\sin w_1 t - w_1 x'\sin w_1 t + w_1 y'\cos w_1 t$$
$$\dot{y} = \dot{y}'\cos w_1 t - \dot{x}'\sin w_1 t - w_1 y'\sin w_1 t - w_1 x'\cos w_1 t$$
$$\ddot{x} = \ddot{x}'\cos w_1 t + \ddot{y}'\sin w_1 t - 2w_1\dot{x}'\sin w_1 t + 2w_1\dot{y}'\cos w_1 t + \dots$$
$$\ddot{y} = \ddot{y}'\cos w_1 t - \ddot{x}'\sin w_1 t - 2w_1\dot{y}'\sin w_1 t - 2w_1\dot{x}'\cos w_1 t \underbrace{+\dots}_{w_1^2\text{-es}}$$

ezt beírjuk az egyenletbe

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega \sin\Psi \dot{y}$$

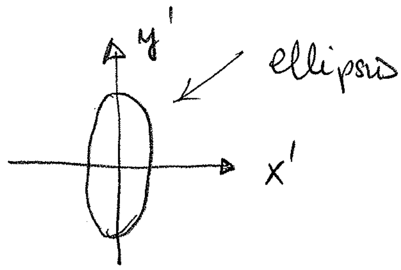
$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\omega \sin\Psi \dot{x}$$

a második tag épp kiesik, ha $\omega_1 = \omega \sin\Psi$!

és rendezzük $\ddot{x}', \ddot{y}'$-re az egyenletet:

$$\ddot{x}' = -\frac{g}{l}x' \qquad \ddot{y}' = -\frac{g}{l}y'$$

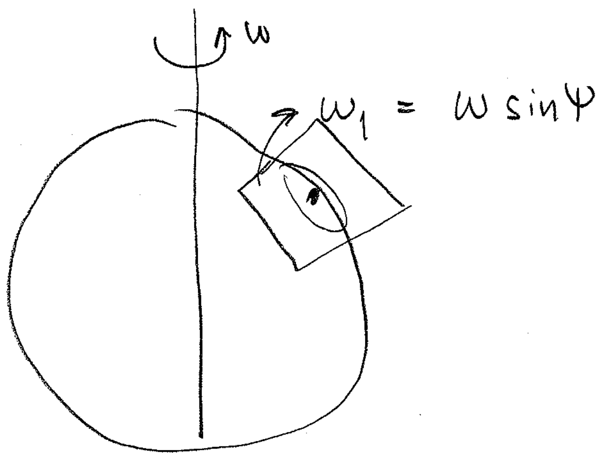
→ ez egy sima gömbi inga!



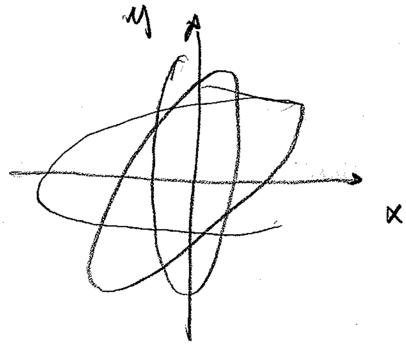
$$x' = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi_{0x}\right)$$

$$y' = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi_{0y}\right)$$

(x, y) ehhez képest forog:



amit látunk



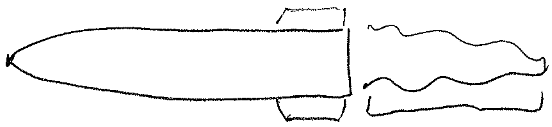
"forgó ellipszis"

4) Rakéta

Egy rakéta tömege m, üresen m_0. Időegység alatt $-\dot{m} = \text{áll.}$ tömegű égéstermék hagyja el a rakétát, V sebességgel. Hogyan függ a rakéta sebessége az időtől?

Megoldás: az impulzusmegmaradást alkalmazzuk

$p = \text{áll.} \Rightarrow \Delta t$ idő alatt nem változik



p t-ben: $m \cdot v$

p $t+\Delta t$-ben: $\underset{\uparrow \atop \dot{m}\Delta t}{(m+\Delta m)}\,(v+\dot{v}\Delta t) \; + \underset{\uparrow \atop v-V}{(-\Delta m)\,w}$

Δt^2-es tagokat elhagyjuk, Δt-vel elosztunk

$$m \cdot v = (m + \dot{m}\Delta t)(v + \Delta t) + (-\Delta m)\,(v - V)$$

$$0 = \dot{m} v + m \dot{v} - \dot{m}(v - V)$$

$$0 = m \dot{v} + \dot{m} V$$

$$\dot{v} = -V \frac{\dot{m}}{m} \qquad v = v_0 - \int_0^t V \frac{\dot{m}}{m}\,dt = v_0 - V \log \frac{m}{m_0}$$

és tudjuk $m(t) = m_0 + \dot{m} t$ és $\dot{m} < 0$ állandó

$m < m_0$, a log negatív.