1.) HF 1b) megoldása

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ez egy, a z tengely körüli pozitív irányú forgatást ír le

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\, \underline{\underline{A}}^T$$

$$\dot{\underline{\underline{A}}} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

így

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\, \underline{\underline{A}}^T = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

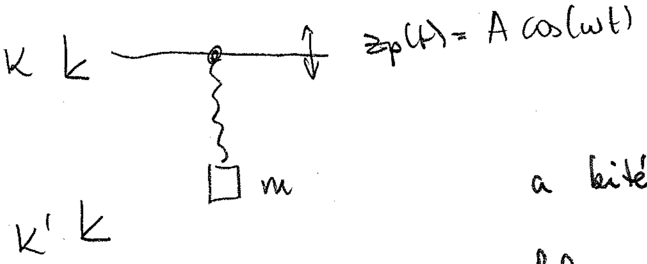
általánosan

$$\underline{\underline{\omega \times}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

a kettőt összevetve $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$ spec. $\varphi = \omega t$ esetén $\dot{\varphi} = \omega$, $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

ami éppen az, amit egy z tengely körüli forgatásra vártunk.

2.) Gyárcsarnokban lógó lámpa (HF 2)



a plafonhoz rögzítjük a K koordinátarendszert ; K' az inerciális

a kitérést az egyensúlyi helyzethez képest írjuk fel. a rugó előfeszítése éppen kiejti a nehézségi erőt:

$$m\ddot{z} + kz' = -m\ddot{z}_p - mg$$

legyen $z = z_0 + z'$ ahol $z_0 = -\frac{mg}{k}$; ekkor

$$m\ddot{z}' + kz' = -m\ddot{z}_p = +m\omega^2 A\cos(\omega t)$$

tfh. $z'(t) = A_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{z}' = -\omega^2 A_0 \cos(\omega t)$, ezt behelyettesítve

$$-m\omega^2 A_0 \cos\omega t \quad + A_0 k \cos(\omega t) \quad = +m A \omega^2 \cos \omega t$$

$$A_0 = \frac{mA\omega^2}{k - m\omega^2} = \frac{A\omega^2}{k/m - \omega^2}$$

van megoldás; z' valóban $z' = A_0 \cos(\omega t)$ alakú.

3.) Rakéta $\quad \Delta t$ idő alatt $\quad \Delta m = -\dot{m}\,\Delta t$ tömeget dob ki

a rakétához képest V sebességgel

impulzus előtte: $\quad m \cdot v$

utána $\quad : \quad (m + \dot{m}\Delta t)(v + \dot{v}\Delta t) + (-\dot{m}\Delta t)(v - V)$

$$\dot{m} < 0$$

az impulzusmegmaradás:

$$\cancel{mv} = \cancel{mv} + \dot{m} v \Delta t + m\dot{v}\Delta t + \dot{m}\dot{v}(\Delta t)^2 - \dot{m}(v - V)\Delta t$$

a $(\Delta t)^2$ rendű tagokat elhagyva, majd Δt-vel leosztva

$$0 = \cancel{\dot{m} v} + m\dot{v} + \dot{m}(V - \cancel{v})$$

$$\dot{v} = -\frac{\dot{m}}{m} V$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dm/dt}{m} V$$

$$dv = -V\frac{dm}{m} \quad \text{integrálva} \quad \boxed{v = v_0 - V \ln\frac{m}{m_0}}$$

fontos, hogy $\quad m < m_0, \quad \ln\frac{m}{m_0} < 0 \quad v > v_0$

4.) Ütközések - mit tudunk mondani két test ütközéséről?

Mi az ütközés?

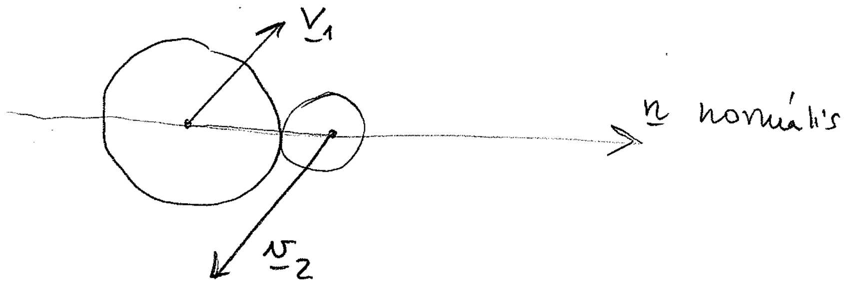
- két vagy több mozgó szilárd test érintkezik
- a köztük ható erők nagyok, a deformációk kicsik

A deformációk leírása nagyon nehéz feladat lenne, ezért most egy egyszerűbb problémát vizsgálunk: gömb alakú tárgyak ($\sim$biliárdgolyók) ütközését.

Az erő rövid ideig hat

→ nem a mozgásegyenletet oldjuk meg

→ a "hirtelen" impulzusmegváltozásokkal számolunk



→ eredmény: sebességek közvetlenül az ütközés után

kiindulás: sebességek közvetlenül az ütközés előtt

centrális ütközés: ütközési normális (felületek normálisa az ütk. pontban) és a 2 test tömegközéppontját összekötő egyenes megegyezik

egyenes / ferde: attól függően, h. az ütközés előtt a 2 sebesség vektora egy egyenesbe esik-e.

impulzusmegmaradás:

$$m_1 \underline{v}_1' + m_2 \underline{v}_2' = m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2$$

az ütközés során nem feltétlenül áll fenn a mechanikai energia megmaradásának elve (a ható erők nem feltétlen konzervatívak → hőfejlődés)

a.) <u>rugalmas ütközés</u> során fennáll

$$m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

b.) <u>tökéletesen rugalmatlan ütközés</u> során a sebességek ütközési normális irányú komponense ütközés után azonos lesz,

$$v_{1n}' = v_{2n}'$$

c.) <u>általános eset</u>

$$\frac{v_{1n}' - v_{2n}'}{v_{2n} - v_{1n}} = \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$: teljesen rugalmas

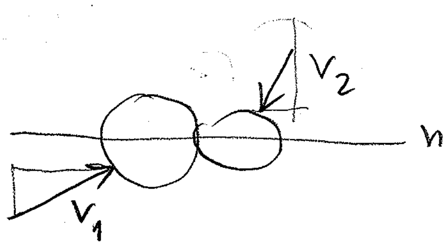
$\varepsilon = 0$: teljesen rugalmatlan

Egyenes ütközések leírása

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_2 - v_1} = \varepsilon \rightarrow v_1', v_2' \text{ kifejezhető}$$

Ferde ütközések leírása



$\underline{v}_1 = \underline{v}_{1n} + \underline{v}_{1t}$

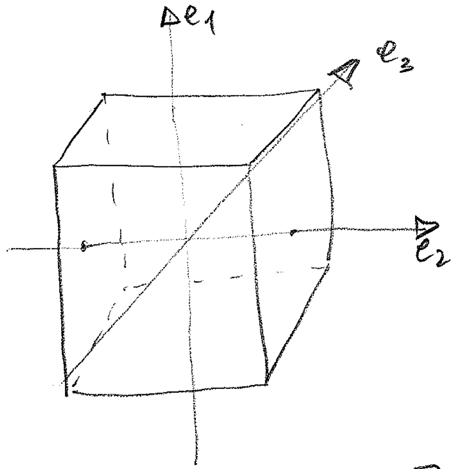
$\underline{v}_2 = \underline{v}_{2n} + \underline{v}_{2t}$

normális és tangenciális komponensre való felbontás

feltesszük, hogy $\underline{v}_{1t}' = \underline{v}_{1t}$ $\underline{v}_{2t}' = \underline{v}_{2t}$

a normális komponens mint az előbb

5.) Merev test fő tehetetlenségi tengelyek körüli forgása



főtengelyrendszerben

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$$

feltesszük: $A < B < C$

a mozgást leíró Euler-egyenletek:

$$A\dot{\omega}_1 = (B-C)\,\omega_2\omega_3$$

$$B\dot{\omega}_2 = (C-A)\,\omega_1\omega_3$$

$$C\dot{\omega}_3 = (A-B)\,\omega_1\omega_2$$

stabilitásvizsgálat: fel fogjuk tenni, hogy

$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ valamilyen $\underline{\omega} = \underline{\omega_0} + \delta\underline{\omega}$ alakú

a $\delta\underline{\omega}$ kicsi; a mozgás stabil ha $\delta\underline{\omega}$ nem nő.

a.) $\underline{e}_1$ körüli forgás

$$\underline{\omega} = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\omega_0}} + \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}}_{\delta\underline{\omega}}$$

$$A\dot{p} = 0 \quad \rightarrow \quad p = \text{áll.}$$

$$B\dot{q} = (C-A)\,\omega_0 r$$

$$C\dot{r} = (A-B)\,\omega_0 q$$

$$B\ddot{q} = (C-A)\,\omega_0\dot{r} = \frac{(C-A)(A-B)\,\omega_0^2 q}{C}$$

$$\ddot{q} = \underbrace{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}}_{<0}\,\omega_0^2 q$$

ezt $(-\lambda^2)$-tel jelölve

$C>A$, $B>A$ $\quad B, C>0$

$q \sim \cos(\lambda t)$ a megoldás

$\rightarrow$ rezgésegyenlet, ez stabil

b.) e_2 körüli forgás

$$\underline{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \delta w = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$A\dot{p} = (B-C)\,w_0\, r$$
$$B\dot{q} = (C-A)\cdot 0 \qquad \Rightarrow \dot{q} = \text{áll.}$$
$$C\dot{r} = (A-B)\,w_0\, p$$

$$C\ddot{r} = (A-B)w_0\,\dot{p} = \frac{(A-B)(C-A)}{B} w_0^2\, r$$

$$\ddot{r} = \underbrace{\frac{(A-B)(C-A)}{BC}}_{>0} w_0^2\, r$$

ezt λ^2-tel jelölve, a megoldás $e^{\lambda t}$ nő, <u>instabil</u>

c.) e_3 körüli forgás

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0 \end{pmatrix} \qquad \delta w = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$A\dot{p} = (B-C)\,w_0\, q$$
$$B\dot{q} = (C-A)\,w_0\, p$$
$$C\dot{r} = 0 \Rightarrow r = \text{áll.}$$

$$A\ddot{p} = (B-C)\,w_0\,\dot{q} = \frac{(B-C)(C-A)}{B} w_0^2\, p$$

$$\ddot{p} = \underbrace{\frac{(B-C)(C-A)}{AB}}_{<0} w_0^2\, p$$

$-\lambda^2$-tel jelöljük

ez is rezgés $\rightarrow$ <u>stabil</u>

megoldás $p \sim \cos(\lambda t)$