① adatok N: Nap, J: Jupiter, F: Föld

tömegek: $M_N = 1,98892 \cdot 10^{30}$ kg $M_J = 1,899 \cdot 10^{27}$ kg $M_F = 5,9742 \cdot 10^{24}$ kg

pályasugár (≈ fél nagytengely, az excentricitást elhanyagoljuk):

$$r_F = 1,496 \cdot 10^{11} \, m \qquad r_J = 7,785 \cdot 10^{11} \, m$$

periódusidő:

$$T_F = 365,25 \cdot 24 \cdot (60)^2 \, s = 3,156 \cdot 10^7 \, s$$

$$T_J = 4331,572 \cdot 24 \cdot (60)^2 \, s = 3,742 \cdot 10^8 \, s$$

és a grav. állandó: $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \, N \left(\frac{m}{kg}\right)^2$

a.) centripetális gyorsulások: $a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T}$

$$a_{cpF} = \frac{4\pi^2 r_F}{T_F^2} = 5,930 \cdot 10^{-3} \, m/s^2$$

$$m_F a_{cpF} = m_F \frac{4\pi^2 r_F}{T_F^2} = 3,543 \cdot 10^{22} \, \underbrace{kg\,m/s^2}_{N}$$

$$a_{cpJ} = \frac{4\pi^2 r_J}{T_J^2} = 2,194 \cdot 10^{-4} \, \frac{m}{s^2}$$

$$m_J a_{cpJ} = 4,167 \cdot 10^{23} \, \underbrace{\frac{kg\,m}{s^2}}_{N}$$

b.) erők

$$F_F = \gamma \frac{M_N M_F}{r_F^2} = 3,543 \cdot 10^{22} \, N$$ az $m_F a_{cpF}$-fel szépen egyezik

$$F_J = \gamma \frac{M_N M_J}{r_J^2} = 4,159 \cdot 10^{23} \, N$$ eltérés csak % nagyságrendű

de sokmindent elhanyagoltunk (pl. a pálya lapultságát) c.) maximális Jupiter - Föld - erő:

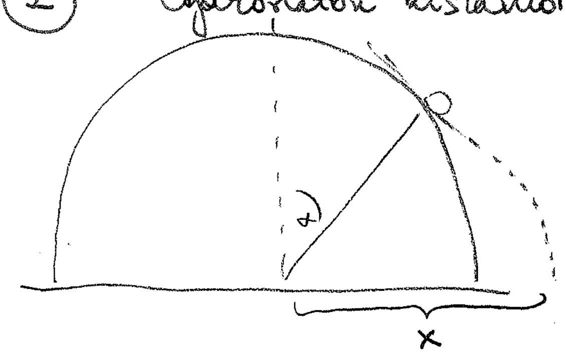
$$F_{JF} = \gamma \frac{M_J M_F}{(r_J - r_F)^2} = 1{,}914 \cdot 10^{18}\ N$$

amikor a lehető legközelebb vannak (oppozíció)

ez valóban elhanyagolható a Föld-Nap-erőhöz képest:

$$\frac{F_{JF}}{F_{NF}} \cong 5{,}4 \cdot 10^{-5}$$

(2) Gyakorlaton kiszámolták, hogy hol hagyja el a lejtőt:



$$\cos\alpha = \frac{2}{3}$$

ekkor a sebessége:

$$v = \sqrt{2gR\underbrace{(1-\cos\alpha)}_{1/3}} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

iránya: a függőlegessel $90° - \alpha$ -t zár be, lefelé

$$v_y = -v\cdot\sin\alpha = -v\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -v\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$v_x = v\cdot\cos\alpha = \frac{2}{3}v$$

a megtett út

$$x(t) = x_0 + v_x\cdot t$$

$$y(t) = y_0 + v_y t - \frac{1}{2}gt^2$$

($t=0$: amikor elhagyja a lejtőt)

amikor földet ér, $y(t)=0$

kezdetben $y_0 = y(0) = R\cos\alpha = \frac{2}{3}R$

$x_0 = x(0) = R\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}R$

t meghatározása:

$$\frac{2}{3}R - \frac{\sqrt{5}}{3}vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

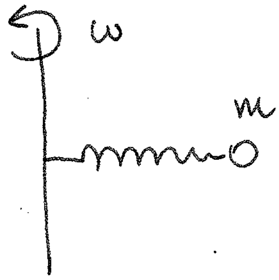
a pozitív gyök:

$$t = \frac{\sqrt{138}-\sqrt{30}}{9}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

ezt x-be beírva

$$x = \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\sqrt{5}}{3}R}}{x_0} + \frac{2}{3}v t = \frac{1}{27}\left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23}\right) R \approx 1{,}12458\, R$$

(3)



$$m\, a_{cp} = m r \omega^2$$

$F_{rugó} = k \cdot \Delta l$ $\qquad \Delta l$: megnyúlás $\qquad r = l_0 + \Delta l$

mozgásegyenlet radiális komponense

$$m \cdot a_{cp} = F_{rugó}$$

$$m (l_0 + \Delta l) \omega^2 = k \cdot \Delta l$$

ahonnan a megnyúlás:

$$\Delta l = \frac{m \omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

$$r = l_0 + \Delta l = l_0 + \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

b.) Ha $m\omega^2 > k$, akkor Δl negatívnak adódik, sőt

$$\Delta l < -l_0$$

tehát a rugót nemcsak összenyomni kellene, hanem át is a tengely túloldalára → ez nem értelmes

nyújtva a rugót viszont a_{cp} ilyenkor gyorsabban nő, mint $F_{rugó}$
→ ilyenkor vagy elszakadásig nyúlik a rugó, vagy amígy $F_{rugó} = k\Delta l$ lineáris összefüggés érvényét nem veszti.

(4) szökési sebesség

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

a.) Föld felszínén $R_F = 6357\ km = 6{,}357 \cdot 10^6\ m$

$$v_{0F} = \sqrt{\frac{2\gamma M_F}{R_F}} = 1{,}1199 \cdot 10^4\ \frac{m}{s} \cong 11{,}2\ km/s$$

Jupiter felszínén $R_J = 7{,}1492 \cdot 10^7\ m$

$$v_{0J} = \sqrt{\frac{2\gamma M_J}{R_J}} = 5{,}954 \cdot 10^4\ \frac{m}{s}$$

c.) a Naprendszertől való elszakadás:

a tömeg jól közelíthető a naptömeggel

itt a sugár a Föld pályasugara

$$v_{0\,Naprsz.} = \sqrt{\frac{2\gamma M_N}{r_F}} = 4{,}212 \cdot 10^4\ \frac{m}{s}$$