1.) $$L = e^{\alpha t}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\right)$$

Euler-Lagrange-egyenletek:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\alpha t} m \dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{p} = e^{\alpha t} m \ddot{x} + \alpha e^{\alpha t} m \dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e^{\alpha t} m \omega_0^2 x$$

$$\dot{p} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow e^{\alpha t} m \ddot{x} + \alpha e^{\alpha t} m \dot{x} + e^{\alpha t} m \omega_0^2 x = 0 \qquad (*)$$

$e^{\alpha t}$-vel elosztva: $$m\ddot{x} + \underbrace{m\alpha}_{\beta} \dot{x} + \underbrace{m\omega_0^2}_{k} x = 0$$

Hamilton-függvény: $H = p\dot{x} - L$ $\quad$ $\dot{x}$-ot p-vel kifejezve

$$\dot{x} = \frac{e^{-\alpha t} p}{m} \qquad p\dot{x} = \frac{e^{-\alpha t} p^2}{m}$$

$$L = \frac{e^{-\alpha t} p^2}{2m} - e^{\alpha t} \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

$$H = \frac{e^{-\alpha t} p^2}{2m} + e^{\alpha t} \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

kanonikus mozgásegyenletek:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{x} = \frac{e^{-\alpha t}}{m} p$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \dot{p} = -e^{\alpha t} m \omega_0^2 x \qquad (**)$$

$\dot{x}$ egyenletéből $p = m e^{\alpha t} \dot{x} \Rightarrow \dot{p} = m e^{\alpha t} \ddot{x} + \alpha m e^{\alpha t} \dot{x}$

Ezt kell a $\dot{p} = \ldots$ egyenletbe $(**)$ behelyettesíteni.

a kapott egyenlet innen ugyanaz, mint a Lagrange-formalizmusban $(*)$.

2.) $$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x})\, dt$$

variáljuk most x-et : $x(t) = x(t) + \delta x(t)$

és legyen $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ és $\delta \dot{x}(t_1) = \delta \dot{x}(t_2) = 0$

$$L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, \ddot{x}+\delta\ddot{x}) \approx \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta\ddot{x}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta\ddot{x}\right)dt$$

$S[x+\delta x] - S[x]$

a második integrálban parciálisan integrálunk:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\underset{u}{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}\,\underset{\dot{v}}{\delta\dot{x}}\right)dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\, dt$$

mert $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

hasonlóan, csak két parciális integrálással a harmadik tagban

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\underset{u}{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}}\,\underset{\dot{v}}{\delta\ddot{x}}\right)dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta\dot{x}\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)}_{u}\underbrace{\delta\dot{x}}_{\dot{v}}\, dt =$$

mert $\delta\dot{x}(t_1) = \delta\dot{x}(t_2) = 0$

$$= \underbrace{-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x\, dt$$

mert $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

összefoglalva

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x}\right)\delta x\, dt$$

$\delta S = 0$ feltétele tehát (ha δx tetszőleges) az, hogy

$$-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

legyen, ez lesz tehát most az Euler-Lagrange-egyenlet.

b.) $$L = -\frac{m}{2}x\ddot{x} - \frac{k}{2}x^2$$

most tehát $\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -\frac{m}{2}x$ $\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{m}{2}\ddot{x} - kx \qquad \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -\frac{m}{2}\ddot{x}$$

a teljes egyenlet $-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\frac{m}{2}\ddot{x} + 0 + \frac{m}{2}\ddot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

ez egy harmonikus oszcillátor; erre a szokásos L-függvény

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 - \frac{k}{2}x^2$$

$$L - \tilde{L} = -\frac{m}{2}x\ddot{x} - \frac{m}{2}(\dot{x})^2$$

erről kell megmutatni, hogy teljes idő-derivált:

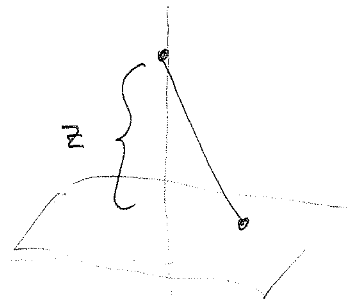
$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{m}{2}x\dot{x}\right) = -\frac{m}{2}x\ddot{x} - \frac{m}{2}(\dot{x})^2$$

ami éppen $L - \tilde{L}$.

3.) Gömbi inga

$$L = K - V \qquad K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = -mgz$$



kényszerfeltétel: $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$

tudjuk, hogy $z > 0$ (az inga lefelé lóg)

$$z^2 = \ell^2 - x^2 - y^2$$

$$z = \sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x)$$ hasonlóan

$$= -\frac{x}{\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}}$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{\ell^2 - x^2 - y^2}\right) + mg\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}$$

Euler-Lagrange egyenletek innen egyszerű deriválással.

Linearizált mozgásegyenletek: ekvivalens azzal, ha a Lagrange-fvben a legfeljebb kvadratikus tagokat tartjuk meg (a deriválás 1-el csökkenti a fokszámot)

$$L \approx \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgl - m \frac{g}{l} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$$

mi:

$$(x\dot{x} + y\dot{y})^2 = x^2 \dot{x}^2 + \ldots$$ csupa negyedrendű tag $\rightarrow$ elhagyjuk

$$\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = l\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}} \approx l\left(1 - \frac{x^2}{2l^2} - \frac{y^2}{2l^2}\right) = l - \frac{x^2}{2l} - \frac{y^2}{2l}$$

a Lagrange-függvényben az mgl konstanstól a mozgásegyenletek nem függnek, így ekvivalens

$$L' = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m \frac{g}{l} (x^2 + y^2)$$

ez harmonikus rezgés x-ben és y-ban is, mi

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt} p_x = m\ddot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -m\frac{g}{l} x$$

E-L-egy.: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + m\frac{g}{l} x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{g}{l} x}$$

teljesen hasonlóan

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{d}{dt} p_y = m\ddot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -m\frac{g}{l} y$$

E-L-egyenlet: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + m\frac{g}{l} y = 0$$

$$\boxed{\ddot{y} = -\frac{g}{l} y}$$

Valóban visszakaptuk a már ismert egyenleteket.