Házi feladatok megoldása, 7. feladatsor

1.) a) $\underline{\underline{A}}_i\, \underline{r} = \underline{e}_i \times \underline{r}$ mátrixok meghatározása

$\underline{e}_1 = (1,0,0) \qquad \underline{e}_2 = (0,1,0) \qquad \underline{e}_3 = (0,0,1)$

$$\underline{e}_1 \times \underline{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

hasonlóan

$$\underline{e}_2 \times \underline{r} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\0\\-x\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_3 \times \underline{r} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\+x\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

<u>Megjegyzés</u> onnan is leolvashatjuk az eredményt, hogy a gyakorlaton szerepelt az "$\omega\times$" mátrix:

$$\underline{\underline{\omega\times}} = \begin{pmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\\omega_z&0&-\omega_x\\-\omega_y&\omega_x&0\end{pmatrix}$$

ha $\underline{\omega} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{e}_1$ $\quad \Big|\quad \underline{\underline{A}}_1 = \underline{\underline{\omega\times}} = \underline{\underline{e_1\times}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \underline{\underline{e_2\times}} = \begin{pmatrix}0&0&+1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix} \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{A}}_3 = \underline{\underline{e_3\times}} = \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{e}_3$$

b.)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{\underline{A}}} = \omega\begin{pmatrix}-\sin\varphi&-\cos\varphi&0\\+\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\varphi = \omega t$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{A}}^T = \omega\begin{pmatrix}-\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi, & -\sin^2\varphi-\cos^2\varphi, & 0\\ \cos^2\varphi+\sin^2\varphi, & \cos\varphi\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi, & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

azaz

$$\underline{\underline{\Omega}} = \omega\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ezt összevetve az $\underline{\underline{\omega\times}}$ mátrixszal

$$\omega_z = \omega \qquad \omega_{x,y} = 0 \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$$

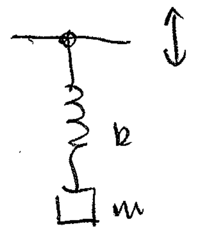
c.) az általános esetben

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{\underline{A}}} = \dot\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{A}}^T = \dot\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{pmatrix}$$

2.) Vezessünk be egy, a plafonnal együttmozgó K rendszert

K



$z_{\text{plafon}} = A \cdot \cos\omega t$ $\qquad \underline{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\cos\omega t \end{pmatrix}$

$$\dot R_z = -A\omega \sin\omega t \qquad \ddot R_z = -A\omega^2 \cos\omega t$$

K' $\qquad$ a fellépő inerciaerő $\quad -m\ddot{\underline{R}}$

a mozgásegyenlet tehát a K koordinátarendszerben (azaz a lámpa mozgása a plafonhoz képest): $\left(m\ddot z + kz = -m\ddot R_z - mg \quad \rightarrow z = z' + z_0 \quad z_0 = -\frac{mg}{k} \right)$

$$m\ddot z' + kz' = A\omega^2 \cos\omega t$$

tfh. a mozgás $\boxed{z' = A_0 \cos(\omega t)}$, ezt behelyettesítve

$$-\omega^2 A_0 \cos\omega t + kA_0 \cos\omega t = A\omega^2 \cos\omega t$$

$$A_0 (k - \omega^2) = A\omega^2$$

$$\boxed{A_0 = \frac{A\omega^2}{\frac{1}{m}k - \omega^2}}$$

(van megoldás, tehát a mozgás valóban $z' = A_0 \cos(\omega t)$ alakú)

3.) Rakéta

a rakéta sebessége, amikor a tömege éppen m, $v = -V \ln \frac{m}{m_0}$

ahol V a kiáramlási sebesség, m_0 pedig a rakéta tömege kezdetben.

a.) $V = +4{,}5$ km/s $\qquad v = 9{,}7$ km/s

mivel $v = -V \ln \frac{m}{m_0}$ $\qquad -\frac{v}{V} = \ln \frac{m}{m_0}$

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{v}{V}\right)$$

így a rakéta teljes üzemanyagával elhasználásakor (ezután már nem nő tovább a sebesség)

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{9.7}{4.}\right) \approx 0{,}1158\, m_0$$

ha a rakéta szerkezete 5%, akkor a hasznos teherre marad

$$m^* = (m - 0{,}05 m_0) = \underline{\underline{0{,}0658\, m_0}}$$

b) az előzőekhez hasonlóan

az első fokozat tömege kiégéskor

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{v}{V}\right) = m_0 \exp\left(-\frac{5}{4.}\right) \approx 0{,}3292\, m_0$$

ebből $0{,}05 m_0$ a szerkezet tömege, a többi a 2. fokozat kiind. tömege

$$m_0' = 0{,}2792\, m_0$$

a 2. fokozatnak 4.7 km/s-ot kell gyorsítania

$$m' = m_0' \exp\left(-\frac{v'}{V}\right) = m_0' \exp\left(-\frac{4.7}{4.5}\right) = 0.3519\, m_0'$$

ebből $0{,}05 m_0'$ szerkezet, a hasznos teher pedig:

$$m^* = 0{,}3019\, m_0' = \underline{\underline{0{,}0843\, m_0}}$$