Segítség az első feladatsorhoz

Lukács Árpád

2010. február 26.

Ívhossz Legyen adott egy $\mathbf{r}(t)$ vektor–skalár-függvény. Ekkor az általa leírt görbe ívhosszát egy adott, t_0 paraméterrel leírt kezdőponttól a

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t' \tag{1}$$

képlettel számolhatjuk ki, ahol $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$. (Általában az idő szerinti deriváltat ponttal, a más paraméter (pl. ívhossz) szerinti deriváltat vesszővel jelöljük.) Az ívhosszparaméterre való áttéréshez először is a kapott $s(t)$ függvényt kell megfordítanunk, azaz kifejeznünk az eredeti paramétert (ez a mechanikában legtöbbször az idő) az s ívhosszal. A kapott függvényt jelölje $t(s)$. A görbe leírása ívhosszparaméterrel:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s))\,. \tag{2}$$

Példa az első gyakorlat jegyzetének a végén látható, a spirális esetén. Érdemes megjegyezni, hogy az inverzfüggvény deriváltjára vonatkozó tétel alapján $t'(s) = 1/v(t)$ (ahol $t = t(s)$), ui. $s'(t) = v(t)$ a fenti (1) képlet deriválásával.

Kísérő triéder Egy görbe *kísérő triéder*én az érintő, normális és binormális egységvektorokból álló hármast értjük. Ívhossz szerint paraméterezett görbe esetén az *érintő-egységvektor* a

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) \tag{3}$$

képlet szerint számolható. Ekkor, mivel $\mathbf{T}$ egységvektor, a hossznégyzetének deriváltja 0, azaz $\mathbf{T}'\mathbf{T} = 0$, tehát $\mathbf{T}'$ merőleges $\mathbf{T}$-re. Így bevezethetünk egy $\mathbf{T}'$ irányú egységvektort, a görbe *normálisát*, úgy hogy

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)\,. \tag{4}$$

Ekkor, mivel $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$, $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{r}''(s)$, és mivel $\mathbf{N}$ egységvektor, a κ *görbület* számítása:

$$\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)|\,, \tag{5}$$

és

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{|\mathbf{T}'(s)|}\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{|\mathbf{r}''(s)|}\mathbf{r}''(s)\,. \tag{6}$$

A *görbületi sugár* nem más, mint a κ görbület reciproka $R_g = 1/\kappa$. A harmadik egységvektor bevezetése: legyen a *binormális vektor*

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)\,, \tag{7}$$

a τ *torzió* pedig a

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s) \tag{8}$$

képlettel adott (itt most nem mutatjuk meg, hogy $\mathbf{B}'$ és $\mathbf{N}$ párhuzamos; ez megtalálható bármely differenciálgeometriával foglalkozó könyvben).

Egy görbe vizsgálata során tehát nincs más dolgunk, mint az ívhossz kiszámolása, áttérés ívhosszparaméterre, majd sorban $\mathbf{r}(s)$ deriváltjainak, és a kísérő triédernek a számolása.

Gyakorlás (a) Érdemes a $t'(s) = 1/v(t(s))$ képlet segítségével kifejezni a kísérő triéder tagjait kifejezni az $\mathbf{r}(t)$ függvény deriváltjaival. Ez akkor lehet hasznos, ha az $s(t)$ integrált nehéz lenne kiszámolni.
(b) Ellenőrizzük, hogy R_g hosszúság dimenziójú mennyiség.
(c) Számoljuk ki egy körre az érintőt, normálist, görbületi sugarat.

Ciklois A ciklois paraméteres egyenletének a kiszámolásához érdemes észrevenni, hogy ha egy R sugarú korong az $y = 0$ egyenesen a $z = 0$ síkban gurul, és $t = 0$-ban $x = 0$ felett van, akkor a középpontjának a helyvektora

$$\mathbf{r}_0(t) = \begin{pmatrix} R\omega t \\ R \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

ahol ω az a szögsebesség, amivel a korong a gurulás közben forog. Ha a pozitív x tengely irányában gurul a korong, akkor az óramutató járásával megegyező irányban forog.

Egy másik hasznos információ, hogy ha felírunk egy ρ hosszúságú, $t = 0$-ban vízsszintes, az óramutató járásával megegyező irányban forgó vektort, akkor ez a vektor koordinátákkal

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \rho \cos \omega t \\ -\rho \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Ezen két vektor alapján a cikloist leíró vektor–skalár-függvény már könnyen megkapható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t)\,. \tag{11}$$