Elméleti Mechanika Gyakorlat

2010/09/13 ①

pav 2010/10/03

Tudnivalók:

- 2 ZH
- Házi feladatok: pontverseny, az első 5-10 "jól jár"
- lesznek numerikus feladatok (OCTAVE)
- időpontok

Hétfő	10:00 -	Lukács Á.	Kémia 058 (Ruff)
Csüt.		Nemes F.	Kémia 317

Első gyakorlat: matematikai ismeretek felfrissítése

Σ, Π : szumma (összeg) és produktum (szorzat)

- számsorozat: $a_i \quad (i = 1, 2, \dots)$

azaz: $a_1, a_2, a_3, \dots$

összeg:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{k} a_k$$

az összegző index "átnevezhető"

szorzat:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

- 1. példa: binomiális tétel

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} \binom{n}{i} =$$

$$= b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + a^n$$

$\binom{n}{k}$ definíciója: n közül k kiválasztása

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{1} \cdot \underbrace{(a+b)}_{2} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a+b)}_{n}$$

$a^i b^{n-i}$: hány féleképpen választhatunk n-ből i-helyen "a"-t (és a maradék $n-i$ helyen b-t) $\rightarrow$ Pascal Δ

2. Példa : számtani sorozat: $a_k = a + k \cdot b$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot a + b \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

itt is $(n+1)$

$(n+1)$ az összeg

3. Példa: Taylor-sor ha f fv. x_0-ban analitikus

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i$$

• Deriváltak, Taylor-sorok

hatványfüggvény $f(x) = x^n$

$f'(x) = ?$ $\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \dots h^2 + \dots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \dots h + \dots h^2 + \dots$$

határérték : $f'(x) = nx^{n-1}$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

exponenciális függvény:

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad \text{(ez a definíció)}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{\substack{i=0 \\ i=k-1}}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

$k = 0$-ra ez 0 u.i. $k! = k(k-1)!$

hatványfv: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha 1^{\alpha-1} x + \frac{1}{2!} \alpha(\alpha-1) x^2 + \ldots$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$$

általános tag:

$$\frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots (\alpha-k+1)}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}_{k!}} x^k$$

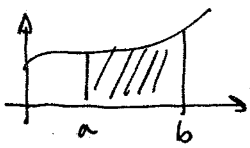
nagyon hasonló $\binom{n}{k}$-hoz: $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$

<u>integrálás</u> határozatlan integrál: "antiderivált"

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{ha} \quad F'(x) = f(x)$$

határozott integrál:

$$\int_a^b f(x) =$$

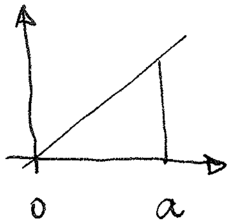


Newton-Leibniz-tétel

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ha $F'(x) = f(x)$

példa:



$$f(x) = \alpha x \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{\alpha}{2} x^2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\alpha}{2} b^2$$

hasonlóan
$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad F(x) = e^x$$

a gyakorlati feladatok megoldásában lesz sok integrál

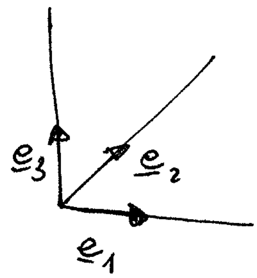
$\rightarrow$ érdemes begyakorolni

Vektorok

$\underline{a}, \underline{b}, \ldots$

$\underline{a}$ vektor kifejtése bázisban:

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{e}_i$$



$$|\underline{e}_i| = 1$$

Pitagorasz-tétel:
$$|\underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

skalárszorzat:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{e}_i \cdot \sum_{k=1}^{3} b_k \underline{e}_k = \sum_{i,k=1}^{3} a_i b_k \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{ik}}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \sum_{i,k=1}^{3} a_i b_k \, \underline{e}_i \times \underline{e}_k = \sum_{ikl=1}^{3} a_i b_k \varepsilon_{ikl} \underline{e}_l$$

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_k = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ikl} \underline{e}_l$$

2 fontos tétel:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{a}(\underline{c}\underline{b})$$

$$\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{irs} = \delta_{kr}\delta_{ls} - \delta_{ks}\delta_{lr}$$

$$(\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{c} = \underline{a}\,(\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{c} \times \underline{a})$$

Vektorok és mátrixok

sor-oszlop szorzás

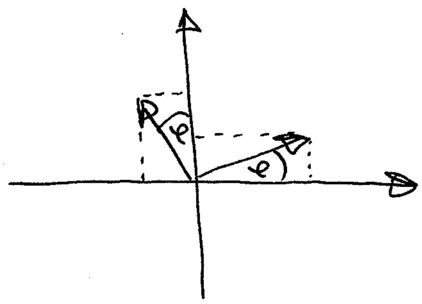
spec. 2D: sík lineáris, az origót fixen hagyó leképezései:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

egységvektorok képei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

→ kitalálhatjuk egy forgatás mátrixát



$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

HF

$$R(\varphi)^T R(\varphi) = \underline{\underline{I}} \qquad R(\varphi)\,R(\vartheta) = R(\varphi + \vartheta)$$

Vektor - integráltételek

Vektoranalízis alapfogalmai

$$\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \longleftrightarrow \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad i = 1,2,3$$

$$x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = z$$

Gradiens: skalárból vektort

$$\text{grad}\, \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \qquad \text{gradiensvektor}$$

$\varphi = \varphi(x,y,z)$ skalár fv. $\qquad \partial_i \varphi \qquad \nabla \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \underline{e}_i$

Divergencia: vektorból skalárt

$$\text{div}\, \underline{v} = \nabla \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \partial_i v_i$$

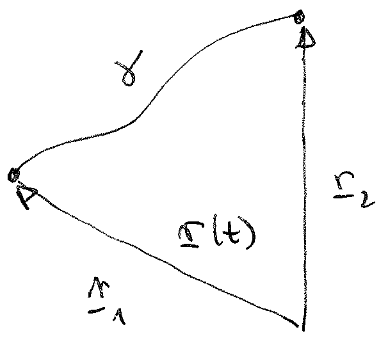
$$\left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$$

Rotáció

$$\text{rot}\, \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_{ikl} \partial_k v_l$$

$$\nabla \times \underline{v} = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} \partial_k v_l \underline{e}_i$$

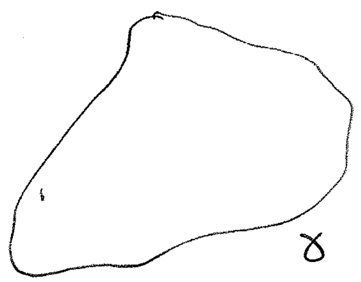
Mi a jelentőségük? Integráltételek



$$\int_\gamma \nabla \varphi \, d\underline{r} = \varphi(\underline{r}_2) - \varphi(r_1)$$

$\Rightarrow$ gradiens integrálja csak a végponttól függ

<u>Stokes - tétel</u>



$$\oint_\gamma \underline{v} \, d\underline{r} = \int_F \mathrm{rot}\, \underline{v} \, d\underline{A}$$

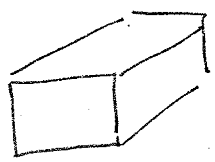
ahol F tetszőleges olyan felület, amelynek határa γ

Tétel: $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$

Mj: ha a tartomány olyan, hogy benne minden görbe pontra húzható, akkor ott fordítva is igaz: $\mathrm{rot}\,\underline{v} = 0 \Rightarrow \exists \varphi : \underline{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$

<u>Gauss - tétel</u>:

$$\oint_F \underline{v} \, d\underline{A} = \int_V \mathrm{div}\, \underline{v} \, dV$$



ahol az F felület a V térfogat határa

Differenciálegyenletek

elsőrendű $\dot{x} = f(x)$

másodrendű: $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$

elsőrendű differenciálegyenlet ~~kö~~közelítő megoldása:

$$t_k < t < t_v$$

→ felosztjuk $t_k = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = t_v$

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i)\,\Delta t \qquad \Delta t = \frac{t_k - t_v}{n}$$

"Euler módszere"

másodrendű egyenlet visszavezetése elsőrendű egyenletre

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = f(x, v)$$

ilyen a mozgásegyenlet

Néhány analitikusan megoldható egyenlet

a) szétválasztható változójú

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1 \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{f(x)} = dt \qquad \int \frac{dx}{f(x)} = t - t_0$$

b) lineáris egyenlet

$$\ddot{x} = -kx$$

próbafüggvény $f(t) = e^{i\omega t}$

$$\dot{f}(t) = i\lambda\, e^{i\omega t}$$

$$\ddot{f}(t) = -\lambda^2 e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 e^{i\lambda t} = -kx$$

$$\omega^2 = k \qquad \omega = \pm\sqrt{k}$$

általános megoldás: $A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$

választhatunk két másik lineárisan független megoldást

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

kezdeti feltételekhez való illesztés:

$$x(t) = C\cos(\omega t) + S\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(\cancel{t}) = -C\omega\sin(\omega t) + S\omega\cos(\omega t)$$

$$x(0) = C$$

$$\dot{x}(0) = S\omega$$

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$