1. A hullámegyenlet megoldása Fourier-sor alakjában

hullámegyenlet 1+1D-ban (pl. nyalmas húr, $c_e = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ $c_t = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$ $\varrho = \frac{F}{q}$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

0 ——— L

határfeltételek:

$$u(0,t) = 0 = u(L,t) \qquad \forall t$$

az egyenletben a változók szétválaszthatók:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

alakba írható az egyenlet. Keressük a megoldást $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ alakban:

$$X\ddot{T} = c^2 X'' T \qquad / \frac{1}{XT}$$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X}$$

a baloldal csak t, a jobb csak x fv-e, ezek csak úgy lehetnek egyenlők, ha mindkettő állandó, pl.

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 = \text{áll.}$$

$$\ddot{T} = -\omega^2 T \quad \Rightarrow \quad T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

de ekkor

$$c^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2$$

$$X'' = -\frac{\omega^2}{c^2} X$$

$$X(t) = \tilde{A}\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + \tilde{B}\sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

hullámszám: k $\qquad \omega^2 = c^2 k^2$

határfeltételek teljesülése:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = X(L) = 0$$

de: $X(x) = \tilde{A} \cos\left(\frac{w}{c} x\right) \qquad X(0) = \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = 0$

$X(x) = \tilde{B} \sin\left(\frac{w}{c} x\right) \qquad X(0) = 0$ ✓

$$X(L) = B \sin\left(\underbrace{\frac{w}{c}}_{k} L\right)$$

$$\Rightarrow \quad kL = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{pos egész}$$

$k = n\frac{\pi}{L}$ a határfeltételek megkvantálják a hullámszámot

$k_n = n\frac{\pi}{L} \qquad \omega_n = ck_n = cn\frac{\pi}{L}$ és a frekvenciát

kaptunk megoldásokat:

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)\right)$$

ezek összege is megoldás, így pl.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\underbrace{\left(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\right)}_{c_n(t)}$$

Honnan tudjuk, hogy mi A_n, B_n?

a kezdeti feltételekből

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) A_n$$

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) B_n \omega_n$$

tehát, ha adott $u(x,0) = u(x)$ $\dot{u}(x,0) = v(x)$

a határfeltételeket kielégítő fv, akkor

$$u(x,0) = u(x) \qquad u(0) = u(L) = 0$$

$$\dot{u}(x,0) = v(x) \qquad v(0) = v(L) = 0$$

kell teljesüljön, ebből határozzuk meg A_n-et, B_n-et

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) A_n$$

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L}\int_0^L v(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

miért igaz?

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)dx = -\int_0^L dx\,\frac{1}{4}\left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right)\left(e^{i\frac{m\pi}{L}} - e^{-i\frac{m\pi}{L}}\right)$$

$$= -\frac{L}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(e^{in\xi} - e^{-in\xi}\right)\left(e^{im\xi} - e^{-im\xi}\right)d\xi = 0$$

ha $n \neq m$

$$\frac{\pi x}{L} = \xi$$

$$\frac{\pi}{L}dx = d\xi$$

ha $n = m$, van 2 konstans tag

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{L}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2(n\xi)\,d\xi}_{1/2\,\pi} = L/2$$

$$\xi = \frac{\pi x}{L} \qquad d\xi = \frac{\pi}{L}d\xi$$

$$c_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$$

az egyenletből, vagy közvetlenül

$$\ddot{c}_n(t) = -\omega_n^2 c_n(t)$$

$$\Rightarrow \quad c_n(t) = \underbrace{c_n(0)}_{A_n} \cos(\omega_n t) + \underbrace{\frac{\dot{c}_n(0)}{\omega_n}}_{B_n} \sin(\omega_n t)$$

2. Álló és haladó hullámok kapcsolata

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$c_n(t) = c_n(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{c}_n(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

hogyan bontható fel balra és jobbra haladó megoldásokra?

$$c_n(t) \sin\Big(\underbrace{\frac{n\pi}{L}}_{k_n} x\Big) = \overbrace{c_n(0)}^{\alpha_n} \cos(\omega_n t) \sin(k_n x)$$

$$+ \underbrace{\frac{\dot{c}_n(0)}{\omega_n}}_{\beta_n} \sin(\omega_n t) \sin(k_n x)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}\big(\cos(a+b) - \cos(a-b)\big)$$

ezzel:

$$\alpha_n \cos(\omega_n t)\sin(k_n x) = \alpha_n \frac{1}{2}\big(\cos(\omega_n t + k_n x) + \cos(\omega_n t - k_n x)\big)$$

$$\beta_n \sin(\omega_n t)\sin(k_n x) = -\beta_n \frac{1}{2}\big(\cos(\omega_n t + k_n x) - \cos(\omega_n t - k_n x)\big)$$

tehát

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\underbrace{\frac{\alpha_n - \beta_n}{2} \cos(\omega_n t + k_n x)}_{\text{balra halad}} + \underbrace{\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \cos(\omega_n t - k_n x)}_{\text{jobbra halad}} \Big]$$

3. Kör alakú membrán sajátrezgései

$$\partial_t^2 u = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \qquad \sigma: \text{ elő feszítés}$$

ez a hullámegyenlet 2+1D-ben

határfeltételek: u a határon nulla (határ: $x^2+y^2=R^2$)

$$u(x^2+y^2=R^2, t) = 0 \qquad \forall t$$

Megoldás módja: a határfeltételekhez illeszkedő koordinátarendszer választása

→ síkbeli polárkoordináták

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad u(x,y;t) \text{ helyett } \quad u(r,\varphi;t)$$
$$y = r\sin\varphi$$

határfeltétel: $u(R,\varphi;t) = 0 \quad \forall \varphi, t$

$\partial_x^2 + \partial_y^2$ átírása polárkoordinátákra: összetett fv. deriváltja

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad \text{stb.}$$

eredmény:

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2$$

sajátmódusok keresése: a változók szétválasztásával

$$u(\underline{r},t) = \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}_{T(t)} R(r) F(\varphi)$$

$$\ddot{T} = -\omega^2 T$$

$$-\omega^2 RFT = c^2\left(R''FT + \frac{1}{r} R'FT + \frac{1}{r^2} RF''T\right)$$

T-vel elosztunk

$$\omega^2 RF + c^2\left(R''F + \frac{1}{r}R'F + \frac{1}{r^2} RF''\right) \qquad / \frac{r^2}{RF}$$

$$\omega^2 r^2 + c^2\left(r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{F''}{F}\right) = 0$$

átrendezve

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\omega^2 r^2 + r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R}}_{\text{csak } r\text{-től függ}} = \underbrace{-\frac{F''}{F}}_{\text{csak } \varphi\text{-től függ}}$$

a kettő csak úgy lehet egyenlő, ha mindkettő állandó

$$F'' = -m^2 F \quad \Rightarrow \quad F = e^{im\varphi}$$

folytonosság $\Rightarrow$ $F(0) = F(2\pi) = e^{2\pi i m}$ kell $\Rightarrow$ $\boxed{m \in \mathbb{Z}}$

R egyenlete: $ck := \omega$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + k^2 - \frac{m^2}{r^2} = 0 \qquad / R$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

legyen $\xi = kr \Rightarrow \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{k}\frac{d}{dr}$ mostantól $' = \frac{d}{d\xi}$

$$k^2 R'' + \frac{k^2}{\xi}R' + k^2\left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right)R = 0$$

$$R'' + \frac{1}{\xi}R' + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right)R = 0$$

ez a Bessel-féle differenciálegyenlet

megoldásai a Bessel-függvények:

$J_m(\xi)$ $\quad Y_m(\xi)$ $\quad$ (M. Abramowitz & I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions)

origóbeli viselkedés meghatározása: Frobenius-sor

$$R(\xi) = \xi^\alpha (a + b\xi + \dots)$$
$$R'(\xi) = \alpha \xi^{\alpha-1} (a + \dots)$$
$$R''(\xi) = \alpha(\alpha-1)\xi^{\alpha-2} (a + \dots)$$

$a\xi^{\alpha-2}$ együtthatója az egyenletből

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2 = 0$$
$$\alpha^2 = m^2 \qquad \alpha = \pm|m|$$

a $\oplus$: reguláris megoldás: $J_0(\xi), J_1(\xi), \dots$

a $\ominus$: irreguláris $\qquad Y_0(\xi), Y_1(\xi), \dots$

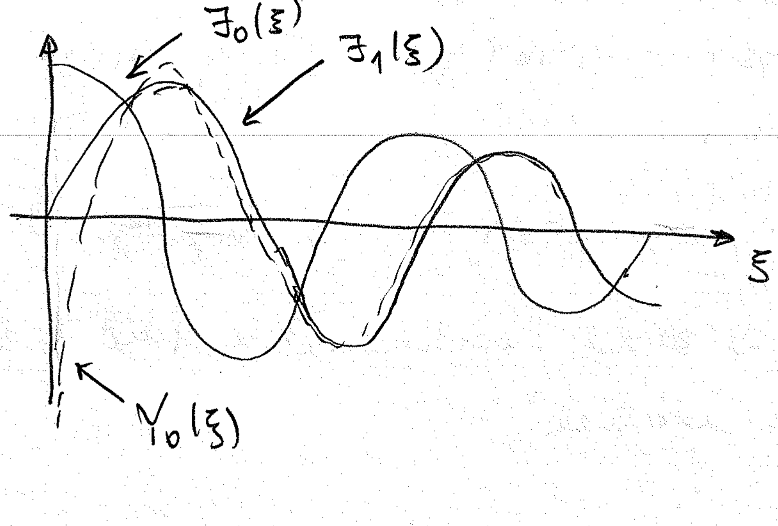
a membrán az origóban sima: sajátrezgéseiben csak a J_m elsőfajú Bessel-függvények szerepelhetnek

$r \to \infty$ viselkedés: $\quad J_m(\xi) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \dfrac{m\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

a ξ-hatvány és $\cos(\dots)$ meghatározása:

$$J_m(\xi) = a\xi^\beta e^{i\xi} + c.c. \quad \text{behelyettesítése}$$

rajzban:



nullahelyek $\quad J_m(j_{m,s}) = 0 \quad s = 1, 2, .$

$j_{0,1} = 2{,}2048 \quad j_{0,2} = 5{,}5201 \quad j_{0,3} = 8{,}6537$

$j_{1,1} = 3{,}8317 \quad j_{1,2} = 7{,}0156 \quad j_{1,3} = 10{,}1735$ stb.

a normálmódus tehát

$$u(r,\varphi) = J_{|m|}(k_{m,s}\, r)\, e^{im\varphi}$$

$\left(\begin{array}{c} \xi = kr \\ \text{visszaírásával} \end{array} \right)$

határfeltétel figyelembevétele:

$$u(R,\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{m,s} R = j_{m,s}$$

$$k_{m,s} = \frac{j_{m,s}}{R} \qquad \omega_{m,s} = c \cdot k_{m,s}$$

indexek: s, m

a határfeltétel ismét megkvantálta a frekvenciákat

Tanulság

- mozgásegyenletek $\rightarrow$ függvényalak
- határfeltételek $\rightarrow$ frekvenciák kvantáltsága

Miért volt az origóban határfeltétel?

$$\left. \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right\} \rightarrow \quad \begin{array}{l} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} y/x \end{array}$$

az origóban szinguláris a koord. trf.: $\quad$ Jacobi-det

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad J = \det\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r$$

$$dx\,dy = J\, dr\, d\varphi = r\, dr\, d\varphi \qquad \text{az origóban } J = 0\ !$$

"a szingularitásnál az eredeti koordinátákban felírt fv-ek reguláritásából határfeltételek adódnak"

4. Impulzusmegmaradás térelméletben

$$L = \int d^3x \; \mathcal{L}(\phi, \nabla\phi, \dot\phi, x, t) \qquad S = \int L\, dt = \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}$$

mozgásegyenletek: $\quad \phi \to \phi + \delta\phi \qquad \dot\phi = \partial_t \phi$

$$\delta S = \int dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j \phi}\partial_j \delta\phi}_{\partial_j\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_j\phi}\delta\phi\right) - \left(\partial_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\phi}\right)\delta\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\delta\dot\phi \right]$$

$$\delta S = \int dt \int d^3x \left[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j \phi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi}}_{=0 \;:\; \text{Euler-Lagrange-egy.}} \right] \delta\phi$$

Mi következik abból, ha $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$?

Tekintsük a $\tilde{\mathcal{L}}(x,t) = \mathcal{L}(\phi(x,t), \nabla\phi(x,t), \dot\phi(x,t), x)$ függvényt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\mathcal{L}}(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\partial_i\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_j\phi}\partial_i\partial_j\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\partial_i\dot\phi + \partial_i\mathcal{L}$$

felhasználjuk az Euler-Lagrange-egyenleteket:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_j\phi} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}$$

$$\partial_i \tilde{\mathcal{L}} = \partial_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\phi}\partial_i\phi\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\partial_i\phi\right) + \partial_i\mathcal{L}$$

összekombinálva

$$\partial_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\phi}\partial_i\phi - \delta_{ij}\mathcal{L}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\partial_i\phi\right) = -\partial_i\mathcal{L}$$

ha $\partial_i \mathcal{L} = 0$, akkor

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi} \partial_i \phi \right) + \partial_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j \phi} \partial_i \phi - \delta_{ij} \mathcal{L} \right) = 0$$

(minden ( ) úgy értendő, hogy a $\phi(x,t)$ -t először behelyettesítve, majd deriválva)

Legyen $\quad \mathcal{P}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi} \partial_i \phi \qquad \mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j \phi} \partial_i \phi - \delta_{ij} \mathcal{L}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_i + \partial_j \mathcal{T}_{ij} = 0$$

$P_i^V = \int_V \mathcal{P}_i \, d^3x$ -vel

$$\dot{P}_i^V = \int_V \dot{\mathcal{P}}_i d^3x = -\int_V \partial_j T_{ij} \, d^3x = \underline{-\int_{\partial V} T_{ij} n_j \, d^2x} = F_i$$

P_i : impulzus $\qquad T_{ij}$: - feszültség (impulzusáramsűrűség)

$V \to \infty$: $\quad \mathcal{P}_i, \mathcal{T}_{ij} \to 0$

$$\boxed{\dot{P}_i = \text{áll.}}$$