1. Mozgás hiperbolikus fixpont körül

legyen $x^* = 0$ a potenciál maximuma ; ennek környékén

$$V(x) \approx V_0 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \text{áll.}$$

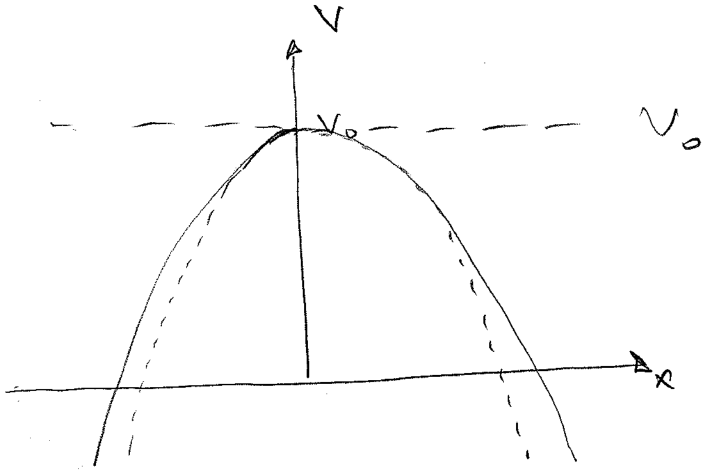
így

$$\text{áll.} = E - V_0 \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

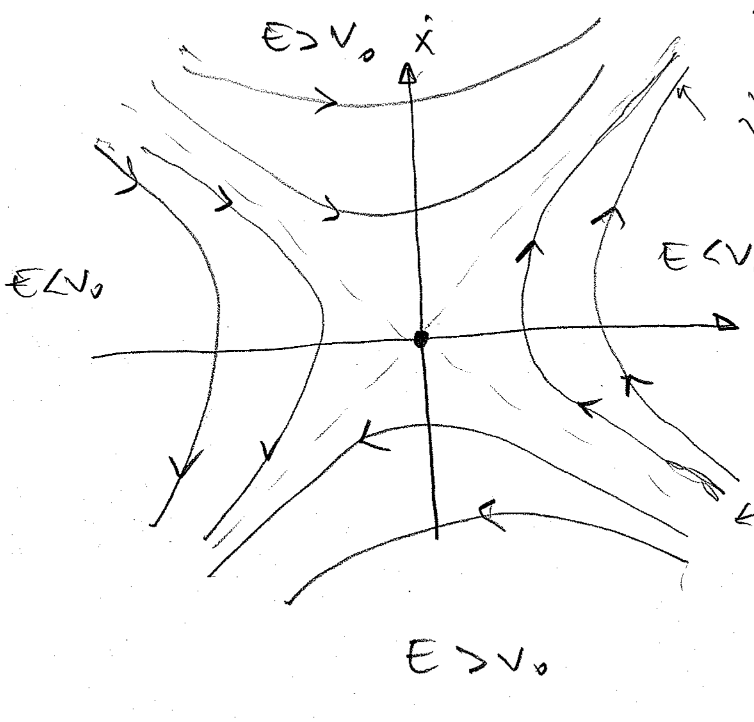
tehát

$$\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2} \approx E - V_0 = \text{áll.}$$

ez egy hiperbola egyenlete; E fvében hiperbolasereg



$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_0 + \frac{1}{2} k x^2\right)}$$



$\sqrt{\frac{k}{m}}$ meredekségű (aszimptota)

$x \to \infty$

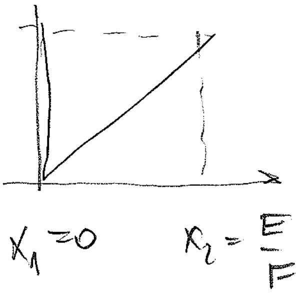
$$\dot{x} \approx \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, |x|$$

← $-\sqrt{\frac{k}{m}}$ me.

2. Még egy példa periódusidőszámolásra

Elm. Fiz. Pt. 8.3. a) és b)

a)



$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ Fx & x\geq 0\end{cases}$$

periódusidő :

$$T=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}=2\int_0^{F/m}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-Fx)}}=$$

$$\xi=\frac{2}{m}(E-Fx)\qquad d\xi=-\frac{2F}{m}\ \leftarrow \text{meg kell fordítani}$$

$$\xi_1=\frac{2}{m}(E-Fx_1)=\frac{2E}{m}$$

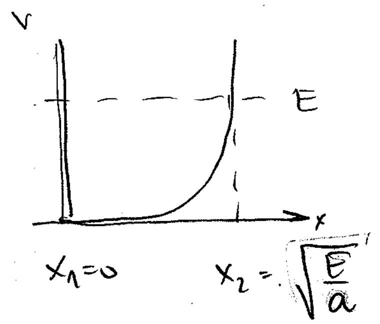
$$\xi_2=\frac{2}{m}(E-Fx_2)=0$$

$$=2\int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{d\xi/\frac{2F}{m}}{\sqrt{\xi}}=\frac{2m}{F}\int_0^{2E/m}\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\sqrt{\xi}'$$

$$=\frac{2m}{F}\left[\sqrt{\xi}\right]_0^{2E/m}=\frac{2m}{F}\sqrt{\frac{2E}{m}}=\frac{2\sqrt{2Em}}{F}$$

b.)



$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ ax^2 & x\geq 0\end{cases}$$

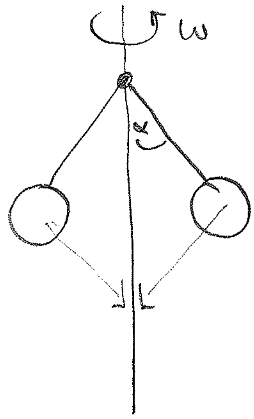
$$x_2=\sqrt{\frac{E}{a}}\qquad x_1=0$$

$$T=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-ax^2)}}=2\sqrt{\frac{E}{a}}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m}(1-\xi^2)}}=$$

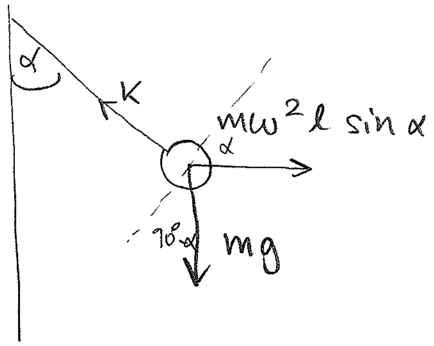
$x=x_2\xi$ hely.

$$=\sqrt{\frac{2m}{a}}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\sqrt{\frac{2m}{a}}\left[\arcsin\xi\right]_0^1=\sqrt{\frac{2m}{a}}\frac{\pi}{2}=\pi\sqrt{\frac{m}{2a}}$$

3.) A centrifugálregulátor



a fele, forgó koordinátarendszerben:



Tekintsük a rendszert a vele együttforgó (ω szögsebességű) koord. rsz.-ben, és bontsuk fel az erőket tangenciális és radiális részre. A mozgásegyenlet radiális része tartalmazza a kényszererőt, így az az egyenlet alkalmas a kényszererő meghatározására:

$$0 = mg\cos\alpha + m\omega^2 l \cos\alpha - K$$

a tangenciális rész pedig a mozgás leírására

$$m l \ddot{\alpha} = m\omega^2 l \sin\alpha\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

- egyensúly: $\ddot{\alpha} = 0$

$$m\omega^2 l \sin\alpha\cos\alpha = mg\sin\alpha$$

$$\rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\rightarrow m\omega^2 l\cos\alpha_2 = mg$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{g}{l\omega^2}$$

$$\alpha_2 = \arccos\frac{g}{l\omega^2}$$

ha $l\omega^2 > g$ (különben csak $\alpha_1 = 0$)

• stabilitásvizsgálat: írjuk fel a linearizált egyenleteket

$\alpha_1 = 0$ körül : α kicsi

$$m l \ddot{\alpha} = m\omega^2 l \sin\alpha\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

$$\sin\alpha \approx \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$$
$$\cos\alpha \approx 1 - \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$m l \ddot{\alpha} = m\omega^2 l\,\alpha - mg\alpha = m(\omega^2 l - g)\alpha$$

az együttható negatív, ha $\omega^2 l < g$, akkor stabil

pozitív, ha $\omega^2 l > g$ instabil

$\alpha_2 = \arccos \frac{g}{l\omega^2}$ körül

rezgésidő: $\Omega^2 = \frac{m(\omega^2 l - g)}{ml} = \omega^2 - \frac{g}{l}$

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$T \to \infty$, ha $\omega^2 \to \frac{g}{l} - 0$

akkor megjelenik a másik

$$m l \ddot{\alpha} = m\omega^2 l \sin\alpha\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

$$\sin\alpha \approx \sin\alpha_2 + \cos\alpha_2(\alpha - \alpha_2) + \mathcal{O}(\alpha - \alpha_2^2)$$

$$\cos\alpha \approx \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2(\alpha - \alpha_2) + \mathcal{O}(\alpha - \alpha_2^2)$$

$$\alpha - \alpha_2 =: \beta \qquad \dot{\beta} = \dot{\alpha} \qquad \ddot{\beta} = \ddot{\alpha}$$

$$m l \ddot{\beta} = \overbrace{m\omega^2 l \sin\alpha_2\cos\alpha_2 - mg\sin\alpha_2}^{0}$$

$$+ m\omega^2 l \cos^2\alpha_2\,\beta \qquad - \underbrace{m\omega^2 l \sin^2\alpha_2}_{\geq 0}\,\beta$$

$$- mg\cos\alpha_2\,\beta$$

$$m\omega^2 l \cancel{\sin}\alpha_2\cos\alpha_2 = mg\cancel{\sin}\alpha_2$$

$$m\omega^2 l\cos^2\alpha_2 = mg\cos\alpha_2$$

ez stabil

rezgési frekvencia: Ω

$$\Omega = \frac{m\omega^2 l}{m l}\sin^2\alpha_2 = \omega^2 \sin^2\alpha_2 =$$

$$= \omega^2(1-\cos^2\alpha_2) = \omega^2\left(1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}\right)$$

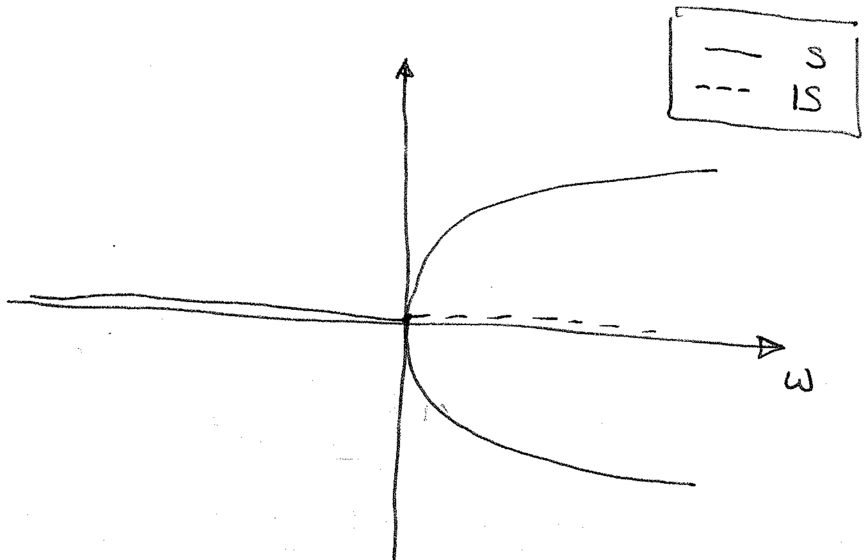
$$= \omega^2 - \frac{g^2}{l^2\omega^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - g^2/l^2\omega^2}}$$

mikor lesz $\Omega = 0$ $(T \to \infty)$?

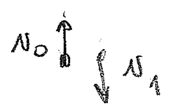
ha $\omega^2 = \dfrac{g^2}{l^2\omega^2}$ $\qquad \omega^4 = \dfrac{g^2}{l^2}$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

épp, amikor megjelenik ez az egyensúly



4) HF1 megoldása



$v_1 = ?$

test mozgásegyenlete:

$$m\ddot{z} = -mg - mk|\dot{z}|\dot{z}$$

a mozgásegyenlet a felfelé szakaszon:

$$\ddot{z} = -g - k\dot{z}^2$$

a sebességre ($\dot{z} = v$) felírva

$$\dot{v} = -g - kv^2 \quad \text{szétválasztható}$$

$$-\frac{dv}{g+kv^2} = dt$$

$$t - t_0 = -\frac{1}{k}\int \frac{dv}{v^2+a^2} = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k}{g}}\,\mathrm{arctg}\left(v\sqrt{\frac{k}{g}}\right)$$

$$a^2 = g/k$$

$$\dot{z} = v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{tg}\left[-\sqrt{kg}\,t + \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}v_0\right]$$

$t=0$-ban legyen $v = v_0$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{tg}\left(-\sqrt{kg}(t-t_0)\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{tg}\left(-\sqrt{kg}\,t + \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}v_0\right)$$

z meghat: $t = 0$-ban $z = 0$

$$z = \int v\,dt$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{(\cos\alpha)'}{\cos\alpha}$$

$\to \int \mathrm{tg}\,\alpha = \ln \mathrm{tg}\,\alpha$, ezt kell alkalmazni, helyettesítés

$$z = \frac{1}{k}\log\frac{\cos\left(-t\sqrt{kg} + \mathrm{arctg}\,v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\right)}{\cos\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}v_0\right)}$$

legnagyobb magasság: ahol $v = 0$

$$t = \frac{1}{\sqrt{kg}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}v_0$$

$$z_{max} = -\frac{1}{k}\log\cos\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}v_0\right) = \frac{1}{k}\log\left(\sqrt{1+\frac{k}{g}v_0^2}\right)$$

ebből a magasságból esik a test vissza, akkor a mozgásegyenlet

$$\ddot{z} = -g + k\dot{z}^2$$

itt is szétválasztunk, a $v = \dot{z}$ változó bevezetésével:

$$\dot{v} = -g + kv^2$$

$$\frac{dv}{kv^2 - g} = dt$$

$$\frac{1}{k}\frac{dv}{v^2 - a^2} = dt$$

$$\underbrace{\frac{1}{k}\int\frac{dv}{v^2-a^2}}_{} = t - t_0$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\frac{a+x}{a-x}$$

ha $|x| < a$

$$-\frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a+v} \qquad a = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$-\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{k}{g}}\ln\frac{-\sqrt{g/k}+v}{\sqrt{g/k}+v} = t - t_0$$

$t=0$ lehet, amikor áll $t_0 = 0$

$$-\ln\frac{\sqrt{g/k}+v}{\sqrt{g/k}-v} = \underbrace{2k\sqrt{\frac{g}{k}}}_{\sqrt{gk}}(t-t_0)$$

$$\frac{-\sqrt{g/k}+v}{\sqrt{g/k}+v} = e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)}$$

$$-\sqrt{g/k} + v = \sqrt{g/k}\,e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)} + v\,e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)}$$

$$\sqrt{g/k} + v = \sqrt{g/k}\, e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)} - v\, e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)}$$

$$v\left(1+e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)}\right) = \sqrt{g/k}\left(e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)} - 1\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)} - 1}{e^{-2\sqrt{gk}(t-t_0)} + 1}$$

$$= -\sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{gk}\,(t-t_0)\right)$$

$t_0 = 0$ választás

ezt is integráljuk, $z = \int v\, dt$

$$\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}} = \frac{\mathrm{ch}'}{\mathrm{ch}} \to \ln \mathrm{ch}$$

$$z = z_{max} - \frac{1}{k} \ln \mathrm{ch} \sqrt{gk}\, t$$

becsapódás: $z = 0$ -ban, $z_{max} = \frac{1}{k} \ln \sqrt{1 + \frac{k}{g} v_0^2}$

$$\mathrm{ch} \sqrt{gk}\, t = \sqrt{1 + \frac{g}{k} v_0^2}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \,\mathrm{arch}\, \underbrace{e^{k z_{max}}}_{\sqrt{1+\frac{k}{g} v_0^2}}$$

ekkor

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{th}\left(\cancel{\sqrt{gk}}\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{gk}}}\,\mathrm{arch}\, e^{k z_{max}}\right)$$

$$\mathrm{th}\,\mathrm{arch}\, y = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$$

and

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}}\;\frac{\sqrt{e^{2kz_{max}}-1}}{e^{kz_{max}}} = -v_0\sqrt{\frac{g}{g+kv_0^2}}$$

$$e^{kz_{max}} = \sqrt{1+\frac{k}{g}v_0^2}$$

$$\frac{\sqrt{\cancel{1}+\frac{k}{g}v_0^2\cancel{-1}}}{\sqrt{1+\frac{k}{g}v_0^2}} = \sqrt{\frac{\frac{k}{g}v_0^2}{1+\frac{k}{g}v_0^2}}$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}}\sqrt{\frac{k/g\;v_0^2}{1+\frac{k}{g}v_0^2}} = -\sqrt{\frac{v_0^2}{1+\frac{k}{g}v_0^2}} = -\sqrt{\frac{gv_0^2}{g+kv_0^2}}$$