Elméleti mechanika gyakorlat, 1. feladatsor

Lukács Árpád, Nemes Frigyes

2010. szeptember 13./16.

Tudnivalók: A gyakorlat honlapja: `www.rmki.kfki.hu/~arpi/teaching/2010elmmech/`. A feladat teljes megoldásához a levezetés, és a számolások részletei is hozzátartoznak. Beadási határidő a következő gyakorlat **kezdete**.

1. Feladat (5p)**.** (a) Számoljuk ki az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény Taylor-sorát $x = 0$ körül.
(b) Ez alapján le tudjuk vezetni a mértani sor összegképletét? $\sum_{k=1}^{n} a_0 q^k = ?$

2. Feladat (2p)**.** Legyen egy mozgó pont helyvektora az idő függvényében $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} bt \\ ct^2 - dt \\ 0 \end{pmatrix}$.
Határozzuk meg a sebességvektort, a sebesség nagyságát, a gyorsulásvektort és a gyorsulás nagyságát az idő függvényében.

3. Feladat (6p)**.** A gyakorlaton szerepelt a φ szöggel való forgatás $\mathbf{R}(\varphi)$ mátrixa. Mutassuk meg, hogy
(a) $\mathbf{R}(\varphi_1)\mathbf{R}(\varphi_2) = \mathbf{R}(\varphi_2)\mathbf{R}(\varphi_1) = \mathbf{R}(\varphi_1 + \varphi_2)$!
(b) $\mathbf{R}(\varphi)^T\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{R}(\varphi)\mathbf{R}(\varphi)^T = \mathbf{I}$!
(c) $\mathbf{R}(\varphi)^{-1} = \mathbf{R}(-\varphi)$!

4. Feladat (6p)**.** (a) Előáll-e a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{A}$ vektormező $\mathbf{v} = \nabla\phi$ alakban? ($\mathbf{A}$ konstans vektor. **Segítség**: számoljuk ki $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ rotációját!)
(b) Legyen most $\mathbf{A} = A\mathbf{k} = (0, 0, A)$ (itt A egy szám, állandó)! Számoljuk ki a fenti $\mathbf{v}$ vektor vonalmenti integrálját egy (x, y)-síkbeli, origó középpontú R sugarú kör mentén, az óramutató járásával ellentétes irányban.
Segítség: a kör paraméterezése legyen

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahol $0 \le t < 2\pi$. Ekkor a kiszámolandó integrál

$$\oint \mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\mathrm{d}t\,.$$

5. Feladat (8p)**.** (a) Írjunk programot az $\ddot{x} = -x$ oszcillátoregyenlet Euler–módszerrel való megoldására $0 \le t \le 2\pi$ (ha nem sikerül, lesz egy ilyen program a gyakorlat honlapján). Legyen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ Tanulmányozzuk, hogy az osztópontok n számától hogy függ az egzakt $x(t) = \sin(t)$ megoldástól való eltérés. Igaz-e, hogy n növelésével egy idő után már nem javul a megoldás? Ha igen, miért?
(b) Vizsgáljuk meg számítógép segítségével, hogy a $\sin(t)$ függvényt $0 \le t \le 2\pi$-n a Taylor sorának első néhány tagja mennyire jól közelíti. Hány tag kell, hogy a hiba sehol se legyen nagyobb, mint 0.01?