Elméleti Fizika 1. Gyakorlat, 2011. február 17

Lukács Árpád

Csüt. $10^{\underline{00}}$ $10^{\underline{45}}$

$11^{\underline{00}}$ $11^{\underline{45}}$

Tudnivalók:

a gyakorlat honlapja:

http://www.rmki.kfki.hu/~arpi/teaching/2011elmfiz1/

Követelmények:

- a gyakorlatokon való megjelenés
- házi feladatok beadása (min $\frac{1}{2}$, ± 1 jegy)
- lesz 2 ZH
- a gyakorlati jegy a 2 ZH átlaga ± 1 a házik alapján. A gyakorlat teljesítéséhez mindkét ZH-n ≥ 2 -es jegyet kell elérni. Egyből lehet javító ZH-n javítani.

Tematika: kb. az előadás tematikája, ameddig eljutunk

Irodalom: Budó Á.: Mechanika

Nagy K.: Elméleti mechanika

Nagy K. (szerk.): Elméleti fizikai példatár

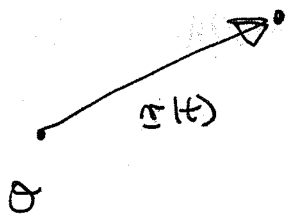
Matematikai előismeretek

- vektorok
- differenciál- és integrálszámítás
- differenciálegyenletek: állandó együtthatós lineáris, szétválasztható változójú

irodalom: Bronstejn–Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv
(újabb kiadás: —„— kézikönyv)

1. Anyagi pont mozgásának leírása

Leírás adott vonatkoztatási rendszerben:



- a helyvektor a kiválasztott origóból mutat abba a pontba, amelynek a mozgását le akarjuk írni
- az idő függvénye

→ ez egy vektor-skalár-függvény, melynek a paramétere az idő (tehát nem ívhosszparaméterezés!!!)

A vektorok megadása: koordinátákkal pl. derékszögű

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

kétféle szokásos jelölés

a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok:

$$\underline{i} = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{j} = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{k} = \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

így
$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$
$$= x_1(t)\,\underline{e}_1 + x_2(t)\,\underline{e}_2 + x_3(t)\,\underline{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\underline{e}_i$$

A sebesség: a helyvektor idő szerinti deriváltja

$$\Delta r := \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$$

Δt : tetszőleges kis időtartam

$$\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

nagysága: $v(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$

Gyorsulás: teljesen hasonlóan

$$\underline{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}(t)}{dt} = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$$

Példa:
$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z_0 + v_{z0} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} v_{x0} + a_x t \\ v_{y0} + a_y t \\ v_{z0} + a_z t \end{pmatrix}$$

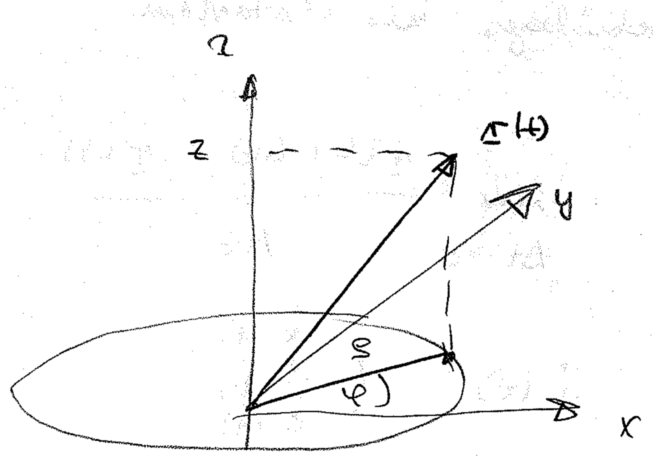
$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

→ ez az egyenletesen gyorsuló test

Áttérés hengerkoordinátákra

$$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix}\right\} \text{Descartes-koordináták} \Leftrightarrow \text{hengerkoord.} \left\{\begin{matrix} \rho(t) \\ \varphi(t) \\ z(t) \end{matrix}\right.$$

áttérési szabály



$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad \underline{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

a koordinátarendszerhez illeszkedő egységvektorok bevezetése

$$\underline{e}_\rho = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}\right|} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_\varphi = \frac{1}{\underbrace{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|}_{\rho}} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{e}_z = \underline{k}$

A sebesség számítása: fontos figyelembe venni, hogy az előbb bevezetett egységvektorok helyfüggők → összetett fv. deriváltja

$$\underline{r}(t) = \rho(t)\,\underline{e}_\rho + z(t)\,\underline{e}_z$$

$$\underline{e}_\rho(\rho(t), \varphi(t), z(t))$$

sebesség:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\,\underline{e}_\rho + \rho(t)\,\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}(t)\,\underline{e}_z$$

$$\dot{\underline{e}}_\rho = \underbrace{\frac{\partial \underline{e}_\rho}{\partial \rho}}_{0}\dot{\rho} + \frac{\partial \underline{e}_\rho}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{\partial \underline{e}_\rho}{\partial z}}_{0}\dot{z}$$

$$\frac{\partial \underline{e}_\rho}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_\varphi$$

így

$$\boxed{\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\,\underline{e}_\rho + \rho(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\underline{e}_\varphi + \dot{z}(t)\,\underline{e}_z}$$

$$v^2(t) = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

u.i. $\underline{e}_\rho, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$ ortonormált vektorrendszer

gyorsulás: hasonlóan

$$\frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{e}_\rho$$

így

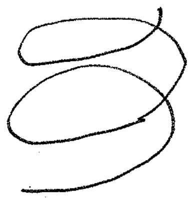
$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \ddot{z}(t)\,\underline{e}_z + \ddot{\varrho}(t)\,\underline{e}_\varrho$$

$$+ 2\dot{\varrho}(t)\dot{\varphi}(t)\,\underline{e}_\varphi + \varrho\ddot{\varphi}(t)\,\underline{e}_\varphi - \varrho\dot{\varphi}^2 e_\varrho$$

2. Példa ívhossz- számolásra

spirális

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ v_z t \end{pmatrix}$$



ívhossz = ?

$$ds = v(t)\,dt$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$v^2(t) = |\underline{v}(t)|^2 = R^2\omega^2 \underbrace{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)}_{1} + v_z^2$$

$$= R^2\omega^2 + v_z^2$$

$$ds = \sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2}\,dt$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t ds = s(0) + \int_0^t v(t)\,dt =$$

$$= s(0) + \sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2}\; t$$