Elmélet fizika 1. gyakorlat, 2011. február 24.

Csüt $10^{15}-11$
$11^{15}-12$

1. Dinamika – emlékeztető

Newton-axiómák + erőtörvény → mozgásegyenlet

Newton-törvény: $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

erőtörvény : $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$

így a mozgásegyenlet $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ 3 (ill. N részecskére 3N) változós másodrendű differenciálegyenlet-rendszer

$$m\ddot{x} = F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$
$$m\ddot{y} = F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$
$$m\ddot{z} = F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$

a megoldáshoz 6 (6N) kezdeti feltétel szükséges:

$t=t_0$-ban $\quad \underline{r}(t_0) = \underline{r}_0 \quad \dot{\underline{r}}(t_0) = \underline{v}_0$

példa előadáson: állandó erő, 6 integrálási állandó, melyek a kezdőfeltételek segítségével rögzíthetők

csak időfüggő erőre: ugyanúgy

$$m\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(t) \rightarrow \ddot{\underline{r}}(t) = \frac{1}{m}\underline{F}(t)$$

integrálva: $$\dot{\underline{r}}(t) = \underbrace{\dot{\underline{r}}(t_0)}_{\underline{v}_0} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \underline{F}(t')\,dt'$$

még egyszer: $$\underline{r}(t) = \underbrace{\underline{r}(t_0)}_{\underline{r}_0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \dot{\underline{r}}(t')\,dt'}_{\underline{v}_0(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} \frac{1}{m}\underline{F}(t'')\,dt''}$$

- az általános esetben is 6 (ill. 6N) kezdeti feltétel szükséges

Az energia

Differenciálegyenletet megoldani általában nem könnyű →
a megoldás valamilyen tulajdonságának előzetes ismerete sokat segíthet. Fontos eset: valamilyen mennyiség megmaradása

kinetikus energia: $T = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\underline{r}})^2$

megváltozása:

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \underset{\dot{\underline{r}}}{\underline{v}^2}\right) = m \ddot{\underline{r}} \dot{\underline{r}}$$

mozgásegyenlet: $m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} T = \underline{F} \dot{\underline{r}}$$

ezt t_1-től t_2-ig integrálva:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{T} \, dt = T(t_2) - T(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \dot{\underline{r}} \, dt = \int_\gamma \underline{F} \, d\underline{r} = \lim \sum \underline{F} \Delta \underline{r} = A$$

munka

ha $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$

kaptuk: <u>munkatétel</u>

$$T(t_2) - T(t_1) = A \qquad \Delta T = A$$

ahol $A = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t) \, dt = \int_\gamma \underline{F} \, d\underline{r}$

ha $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$

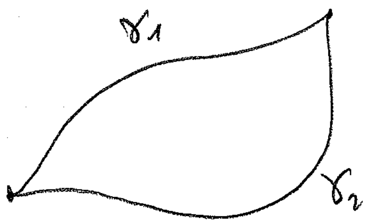
spec:

- $\underline{F}$ lehet, h. időtől explicite nem függ

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t))$$

<u>autonóm rendszer</u> (mostantól szinte csak ilyen)

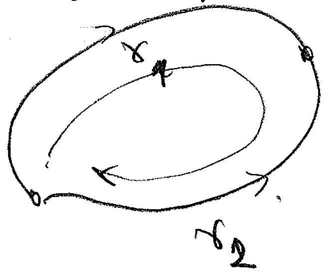
- előfordulhat, hogy a végzett munka csak a pálya kezdő- és végpontjától függ: <u>konzervatív erő</u> (ekkor $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$)



azaz
$$\int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{r}$$

<u>Áll.:</u> ha $\underline{F}$ konzervatív, akkor zárt γ görbén az integrálja 0

<u>Biz:</u> γ-t felbontjuk γ_1, γ_2-re 2 pont kiválasztásával



$$\int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{r}$$

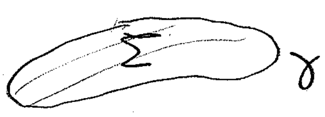
$$\oint_{\gamma} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{r} - \int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{r} = 0$$

<u>Mj:</u> visszafelé is igaz: $\oint_{\gamma} \underline{F}\, d\underline{r} = 0$ $\forall \gamma$ zártra

$\Rightarrow$ $\underline{F}$ konzervatív

<u>Áll.:</u> ha $\underline{F}$ olyan, hogy $\mathrm{rot}\,\underline{F} = \nabla \times \underline{F} = 0$, akkor $\underline{F}$ konzervatív

<u>Biz:</u> Stokes-tétel



$$\oint_{\gamma} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\Sigma} (\mathrm{rot}\,\underline{F})\, d\underline{f} = 0$$

felületelem

Σ: felület, melynek γ határa

(kell: van ilyen Σ felület $\rightarrow$ egyszeresen összefüggő tartomány)

1. Feladat ha $\underline{F}$ olyan, hogy létezik olyan V függvény, hogy $\underbrace{\underline{F} = -\operatorname{grad} V}_{\underline{F} \text{ potenciálos}}$ akkor $\underline{F}$ konzervatív.

V: potenciál

Megoldás: elég $\operatorname{rot} \underline{F} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = 0$

elég: tetsz. V -re $\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = 0$

$$\operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$$

tehát

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z V - \partial_z \partial_y V \\ \partial_z \partial_x V - \partial_x \partial_z V \\ \partial_x \partial_y V - \partial_y \partial_x V \end{pmatrix} = 0$$

Young-tétel: $f(x,y)$ 2-vált. függvény

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$$

Konzervatív = megőrző → Teljes energia

$$E = T + V$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\underline{r}})^2 \qquad \underline{F} = -\,\mathrm{grad}\, V$$

ekkor

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m (\dot{\underline{r}})^2 + V(\underline{r}(t)) \right) =$$

$$= m \ddot{\underline{r}} \dot{\underline{r}} + \nabla V \cdot \dot{\underline{r}} = (m \ddot{\underline{r}} + \nabla V) \dot{\underline{r}} = 0$$

de a mozgásegyenlet szerint $m \ddot{\underline{r}} = \underline{F} = -\nabla V$

Kaptuk tehát: $\frac{d}{dt} E = 0 \qquad E = T + V = \text{áll.}$

---

2. Feladat: konzervatív-e

a) $\underline{F}(\underline{r}) = F_0 \cdot \underline{r}$ — F_0 skaláris állandó

b) $\underline{F}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{A}$ — $\underline{A}$ állandó vektor

Megoldás:

a) $$\underline{F}(\underline{r}) = F_0 \underline{r} = \begin{pmatrix} F_0 x \\ F_0 y \\ F_0 z \end{pmatrix}$$

rot $\underline{F}$-et kell kiszámolni:

$$\mathrm{rot}\, \underline{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = 0$$

Mi a potenciál? a munkatétel segítségével kiszámolható:

$$T(t_2) - T(t_1) = A = \int_\gamma \underline{F}\, d\underline{r}$$

összevetve az energiamegmaradással

$$T(t_1)+V(t_1) = E = T(t_2)+V(t_2)$$

$$\Rightarrow \quad T(t_2)-T(t_1) = V(t_1)-V(t_2) = V(\underbrace{\underline{r}(t_1)}_{\underline{r}_1}) - V(\underbrace{\underline{r}(t_2)}_{\underline{r}_2})$$

tehát $\quad V(\underline{r}_1)-V(\underline{r}_2) = -A = -\int_\gamma \underline{F}\, d\underline{r}$

a potenciálnak csak a gradiense számít: egy tetsz. $\underline{r}_2$ pontot rögzíthetünk:

$$V(\underline{r}) = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F}\, d\underline{r} \quad + \text{const.}$$

és konzervatív erő esetén az integrálási út tetszőleges (az eredmény nem függ tőle)

$\underline{F}(\underline{r}) = F_0\, \underline{r}$ - re alkalmazva

legyen az út egyenes $\quad \underline{r}(\tau) = \underline{r}_1 \cdot \tau \quad$, $\underline{r}_0$ az origó

$$V(\underline{r}_1) = -\int \underline{F}\, d\underline{r} = -\int_0^1 \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(\tau))}_{\underbrace{F_0 \cdot \underline{r}(\tau)}_{F_0 \cdot \underline{r}_1 \cdot \tau}} \underbrace{\dot{\underline{r}}(\tau)}_{\underline{r}_1}\, d\tau = -F_0\, \underline{r}_1^2 \underbrace{\int_0^1 \tau\, d\tau}_{1/2}$$

tehát $\quad V(\underline{r}) = -\frac{1}{2} F_0\, r^2$

ellenőrzés:

$$-\nabla V \stackrel{?}{=} \underline{F}$$

$$-\nabla V = \nabla\left(\frac{1}{2} F_0 r^2\right) = \frac{1}{2} F_0 \nabla r^2 = \frac{1}{2} F_0 \nabla (x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x^2} = 2x \text{, stb.} \qquad -\nabla V = \frac{1}{2} F_0 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = F_0\, \underline{r} \checkmark$$

b.) $$\underline{F}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{A} = \begin{pmatrix} yA_z - zA_y \\ zA_x - xA_z \\ xA_y - yA_x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_x - A_x \\ -A_y - A_y \\ -A_z - A_z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = -2\underline{A}$$

$\mathrm{rot}\,\underline{F} \neq 0 \Rightarrow$ az erőtér nem konzervatív, azaz nem potenciálos