Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2011. március 3.

egydimenziós mozgások, rezgések

1. Konzervatív rendszerek egy dimenzióban

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

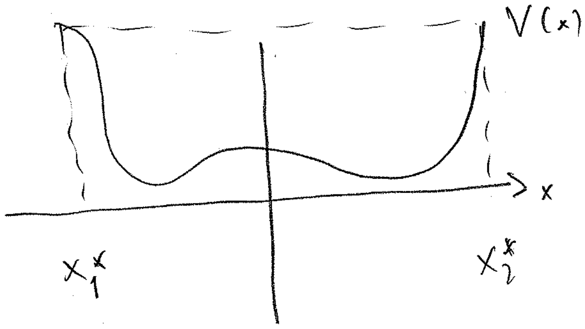
megmarad: a múltkor láttuk, hogy $E =$ áll.

de:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E = \text{áll.}$$

alkalmas $|\dot{x}|$ meghatározására

$$|\dot{x}| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$



- ott lehetséges, ahol $E > V(x)$

→ a mozgás ezen a szakaszon történik

- ahol $E = V(x^*)$: $\dot{x} = 0$

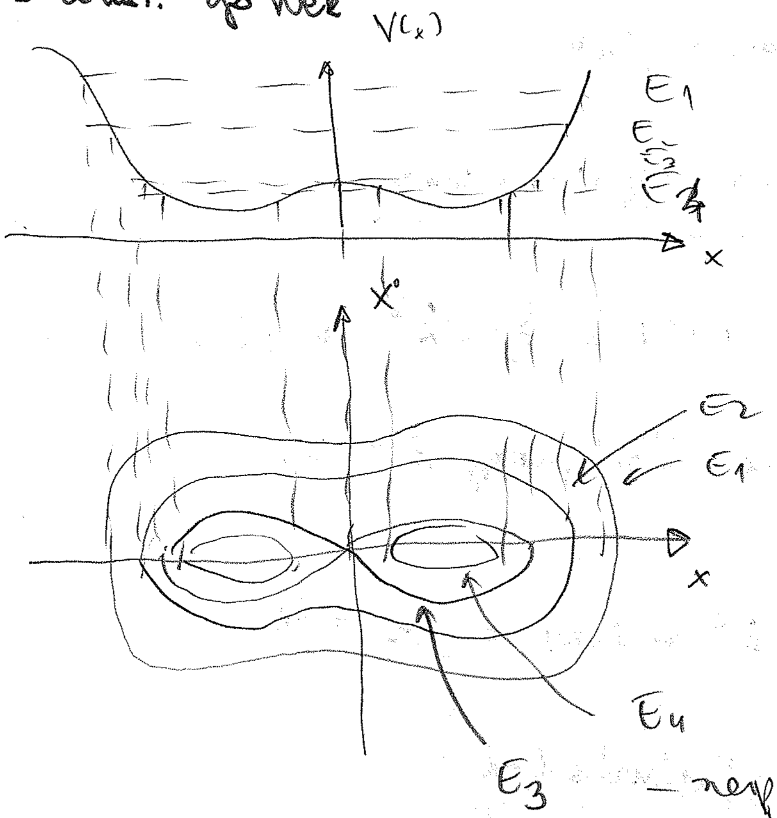
"fordulópontok"

ha egy szakaszon ismert $\dot{x}$ előjele, akkor

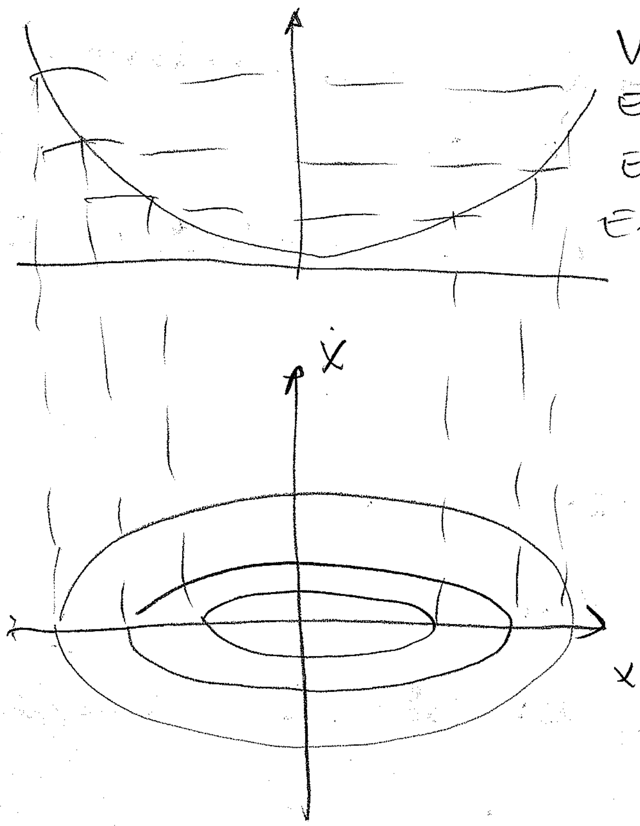
$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

alkalmas a mozgás leírására, de: elsőrendű (a mozgásegy. másodrendű)

x_0, v_0 kezd. felt. ⟷ x_0, E megadása, x_0: kezd. felt. E: paraméter adott potenciálkor $\dot{x} - x$: görbe E függvényében: fázistér-ábra, $E = \text{const.}$ görbék



1. **Példa: harmonikus oszcillátor**



$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

E_1

E_2 $$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

E_3

ez $x - \dot{x}$ síkon ellipszis egyenlete

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} k x^2\right)}$$

fordulópontok

$$x^*_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

a mozgás kiszámítása:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

ha egy szakaszon az előjel is megv.: szétválasztható változójú DE

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}} = dt$$

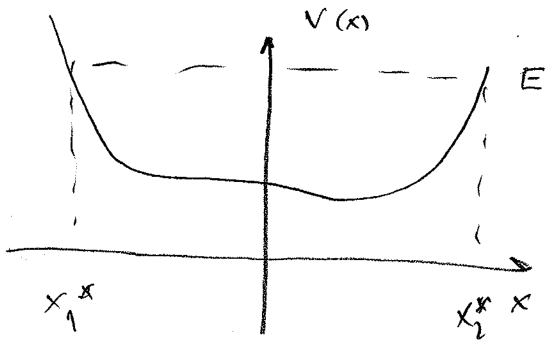
integrálva:

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$

<u>Alkalmazás</u>: periódusidő- számolás

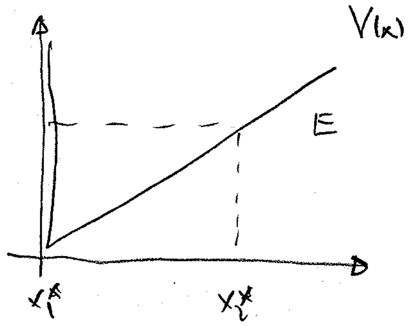
$x^*_{1,2}$: fordulópontok

oda- és visszaút ideje azonos



$$T = 2\int_{x_1^*}^{x_2^*}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$

<u>Példa:</u>



$$V(x) = \begin{cases} Fx & \text{ha } x \geq 0 \\ \infty & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

fizikai kép: $x=0$-ban mindig visszapattan

Periódusidő = ?

Megoldás:

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = \frac{E}{F}$$

$$T = 2\int_{x_1^*}^{x_2^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} = 2\int_0^{E/F} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-Fx)}}$$

változócsere az integrálban: $\xi = \frac{2}{m}(E-Fx)$

$$d\xi = -\frac{2F}{m}dx$$

határcserével eltüntethető

$$\xi_1^* = \frac{2}{m}(E-Fx_1) = \frac{2E}{m}$$

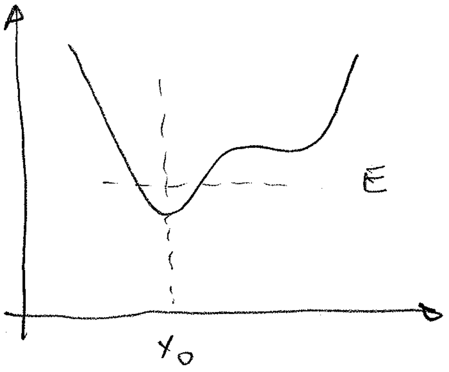
$$\xi_2^* = \frac{2}{m}(E-Fx_2) = 0$$

$$T = 2\int_{\xi_2^*}^{\xi_1^*} \frac{d\xi / \frac{2F}{m}}{\sqrt{\xi}} = \frac{2m}{F}\int_0^{2E/m} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}} = \frac{2m}{F}\sqrt{\frac{2E}{m}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8Em}}{F}$$

ui. $(\sqrt{\xi})' = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$

2. Egyensúly körüli kis rezgések



Legyen x_0 a potenciál egy lokális minimuma!

$$\Rightarrow \quad V'(x_0)=0 \qquad V''(x_0)>0$$

(itt most csak a $V''(x_0)>0$ esettel foglalkozunk, a magasabbrendű minimumokkal nem)

ha $V'(x_0)=0$, akkor a mozgásegyenletből:

$$m\ddot{x} = -V'(x)$$

ha $t=0$-ban $x=x_0$, $\dot{x}=0$, akkor

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}V'(x_0)=0$$

$$\dot{x} = \text{áll.} = 0$$

adódik $\Rightarrow$ x_0 egyensúlyi pont

x_0 körül a potenciált Taylor-sorba fejtjük

$$V(x) \approx V(x_0) + \overbrace{V'(x_0)}^{0}(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)$$

$$F(x) = -V'(x) \approx -V''(x_0)(x-x_0)$$

a mozgásegyenletben bevezetünk egy új változót:

$$\tilde{x} := x - x_0$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} \qquad \ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$$

$$\ddot{\tilde{x}} \approx -kx \qquad \text{ahol } k = V''(x_0)$$

ez a harmonikus rezgés egyenlete, $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{V''(x_0)}{m}$

a körfrekvencia

tehát: $V''(x_0) > 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{V''(x_0)}{m} > 0$ rezeg

minimum

stabil egyensúly

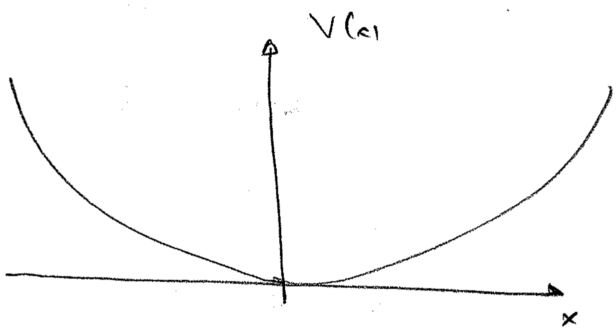
$V''(x_0) < 0 \Rightarrow$ instabil egyensúly

maximum

<u>3. Példa</u> vizsgáljuk meg a $V(x) = \frac{\beta}{2} x^4 + \gamma x^2 + \delta$ potenciált, legyen $\beta > 0$

<u>Megoldás</u>:

ha $\gamma > 0$:



ilyenkor 1 minimum van:

$$V'(x) = 2\beta x^3 + 2\gamma x = x(2\beta x^2 + 2\gamma)$$

$x_0 = 0$ $\quad V'(x_0) = 0$ $\quad \beta, \gamma > 0$

$$V''(x) = 6\beta x^2 + 2\gamma$$

$$V'(x_0) = 2\gamma > 0$$

tehát ez az egyensúly <u>stabil</u>

$$\omega^2 = \frac{2\gamma}{m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}}$$

ezzel az ω körfrekvenciával rezeghet a tömegpont $x_0 = 0$ körül

Ha $\gamma < 0$: legyen $\eta^2 = -\frac{\gamma}{\beta}$

ezzel

$$V(x) = \frac{\beta}{2}(x^2-\eta^2)^2 + \text{konst.}$$

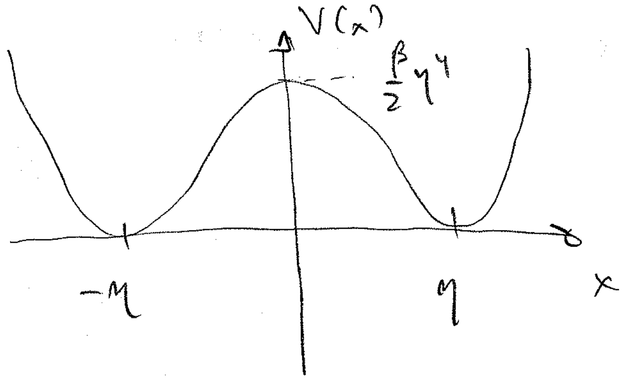
ugyanis $\frac{\beta}{2}(x^2-\eta^2)^2 = \frac{\beta}{2}x^4 - \beta\eta^2x^2 + \frac{\beta}{2}\eta^4 =$

$$= \frac{\beta}{2}x^4 - \gamma x^2 + \frac{\beta}{2}\eta^4$$

a potenciálból a konstanst elhagyva ($F = -\nabla V$ nem változik)

$$V(x) = \frac{\beta}{2}(x^2-\eta^2)^2$$

$|x| = \eta$-ban 0, mindenütt máshol pozitív.



$$V'(x) = 2\beta(x^2-\eta^2)x$$

$$V'(\pm\eta) = 0 \qquad V'(0) = 0$$

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = -\eta \qquad x_2 = \eta$$

egyensúlyok

$$V''(x) = 2\beta(x^2-\eta^2) + \underbrace{2\beta x 2x}_{2\beta 2x^2} = 2\beta(3x^2-\eta^2)$$

$$V''(0) = -2\beta\eta^2 = -2\beta\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right) = 2\gamma < 0$$

ez tehát <u>instabil</u> egyensúly

$$V''(\pm\eta) = 2\beta(3\eta^2-\eta^2) = 4\beta\eta^2 = 4\beta\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right) = -4\gamma > 0$$

ez <u>stabil</u> $\omega = \sqrt{-\frac{4\gamma}{m}}$

érdekesség: a két eset határa

$\gamma = 0$

ilyenkor, ha $\gamma \to 0$ $\omega^2 \to 0$ mindkét esetben

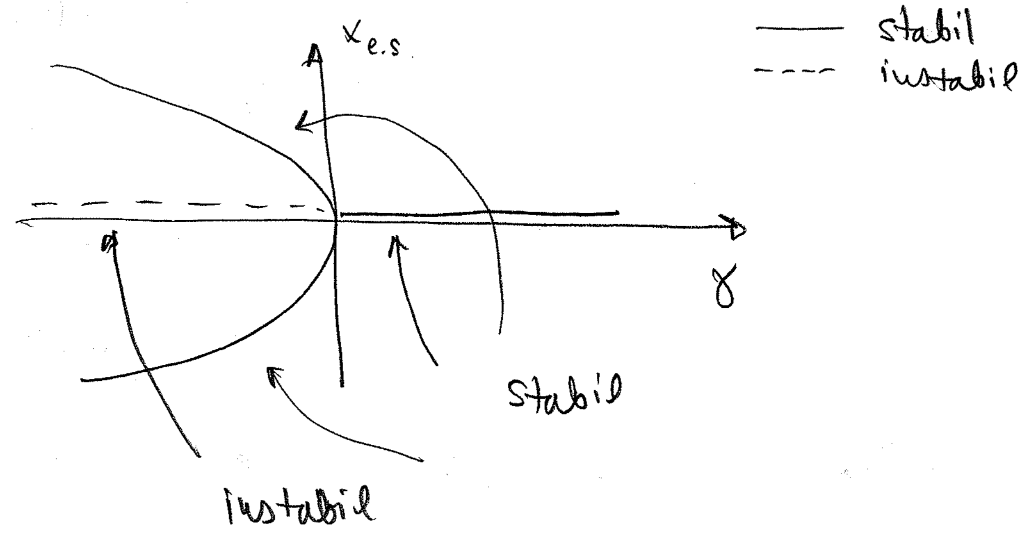
a periódusidő $T = \frac{2\pi}{\omega}$

ha $\gamma \to 0$ $T \to \infty$ mindkét esetben

a potenciál "ki simul"

$\gamma \to -0$: $\eta^2 = -\frac{\gamma}{\beta} \to -0$

<u>Bifurkáció</u> egyensúlyi helyzetek γ függvényében



stabilitás változásakor $T = \frac{2\pi}{\omega} \to \infty$

index: #stabil − # instabil = áll.

$2 - 1 = 1$ ✓