1. Gradiensszámolás HF megoldása

a.) $\phi(\underline{r}) = r = |\underline{r}|$

b.) $\phi(\underline{r}) = f(r)$ ahol f tetsz. f.

Megoldás

a.) $\phi(\underline{r}) = |\underline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad \nabla\phi(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \underbrace{\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}}_{\cancel{2}x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

y, z hasonlóan

$$\Rightarrow \nabla r = \frac{\underline{r}}{r}$$

b.) összetett függvényként

$$r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f(r) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

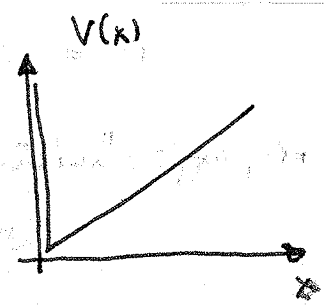
$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, \quad y,z \text{ hasonlóan} \Rightarrow \nabla f(r) = f'(r)\nabla r$$

$$\Rightarrow \nabla f(r) = f'(r)\frac{\underline{r}}{r}$$

2. Lineáris potenciál – HF megoldása

$$V(x) = \begin{cases} F_0 x & \text{ha } x \geq 0 \\ \infty & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$F_0 > 0$ állandó



erő: $F = -V'(x) = -F_0$ állandó, balra ható erő

$$m\ddot{x} = -F_0 \qquad (1)$$

ugyanolyan, mint a mozgás a földi gravitációban → emlékezhetünk a megoldásra középiskolából

Vagy: szerepelt a megoldás arra az esetre, ha az erő a helytől nem függ ("csak az időtől függő erő"): (1)-et integráljuk

$$m\dot{x}(t) - m\dot{x}(t_0) = -F_0(t - t_0)$$ legyen $t_0 = 0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$

$$m\dot{x}(t) = mv_0 - F_0 t$$

integráljuk még egyszer

$$m\,x(t) - m\underbrace{x(0)}_{x_0} = m v_0 t - \frac{1}{2} F_0 t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2m} F_0 t^2$$

de: az erő csak $x > 0$-ra $-F_0$, ott $+\infty$, azaz ha a test eléri az $x=0$-t visszapattan, újabb periódus kezdődik. Mikor éri el?

- legyen $t = 0$-ban $x = 0$-ban $\Rightarrow x_0 = 0$
- legközelebb akkor van $x = 0$-ban, ha

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2m} F_0 t^2$$

itt $t \neq 0$, egyszerűsítünk

$$v_0 = \frac{F_0 t}{2m}$$

$$T = t = \frac{2mv_0}{F_0}$$ ez a periódusidő

v_0 kifejezése az energiával:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V \qquad x = 0 \text{ - ban } V = 0$$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$T = \frac{2m v_0}{F_0} = \frac{2m\sqrt{\frac{2E}{m}}}{F_0} = \frac{\sqrt{8Em}}{F_0}$$

ez a múltkor is megkapott képlet.

3. Centrális mozgás: vezessük le elemi úton a körpálya adatai közti összefüggéseket!

Megoldás: gravitációs tér:

$$\underline{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \underline{e}_r$$

egyenletes körmozgás: centripetális gyorsulás

$$\underline{a} = \underline{a}_{cp} = -a_{cp} \cdot \underline{e}_r = -r\omega^2 \underline{e}_r$$

Newton-törvény:

$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^2} = \cancel{m} r \omega^2$$

$$r^3 \omega^2 = \gamma M$$

a periódusidővel kifejezve: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$ (Kepler III. benne van!)

4. A Földpálya adataiból számoljuk ki a Nap tömegét!

az előbbi egyenletet átrendezve: $M = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{r^3}{T^2}$

$r = 150$ millió km $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m $\qquad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\,(m/kg)^2$

$T = 1$ év $= 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60^2\ s = 3{,}16 \cdot 10^7\ s \qquad 4\pi^2 = 39{,}48$

ezekkel az adatokkal:

$$M \approx 2 \cdot 10^{30}\ kg$$

táblázati adat: $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$ → egész jó.

5. Milyen hatványfüggvény-potenciálokban lehetséges stabil körpálya?

azaz $V(r) = \alpha r^n$

Megoldás:

effektív potenciál alkalmazása: hengerkoord. levezetése, radiális rész:

$\ddot{r}$ - ban e_r együtthatója:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$$

a mozgásegyenlet radiális része tehát:

$$m\ddot{\rho} = -V'(\rho) + m\rho\dot{\varphi}^2 = -V'(r) + \underbrace{m\rho\frac{N_z^2}{m^2\rho^4}}_{\frac{N_z^2}{m\rho^3}}$$

impulzusmomentum: $N_z = m\rho^2\dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{N_z}{m\rho^2}$$

átalakítva

$$m\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho}\Big[\underbrace{V(\rho) + \frac{N_z^2}{2m\rho^2}}_{V_{eff}(\rho)}\Big]$$

pont, mint egy 1D mozgás egyenlete a

$$V_{eff}(\varrho) = V(\varrho) + \frac{N^2}{2m\varrho^2}$$

"effektív potenciálban"

pl. gravitáció $V(\varrho) = \frac{\gamma m M}{\varrho}$

körpálya: $\varrho =$ áll. $\longleftrightarrow$ egyensúly

körpálya stabilitása: egyensúly körüli kis rezgések

körpálya sugara $V(\varrho) = \alpha \varrho^n$ esetén:

$$V_{eff}(\varrho) = \alpha \varrho^n + \frac{N^2}{2m\varrho^2}$$

egyensúly: $0 \overset{!}{=} V'_{eff}(\varrho_c) = n\alpha \varrho_c^{n-1} - \frac{N^2}{m\varrho_c^3}$

$$n\alpha \varrho_c^{n+2} = \frac{N^2}{m}$$

$$\varrho_c = \left(\frac{N^2}{nm\alpha}\right)^{\frac{1}{n+2}}$$

stabilitás: $V''_{eff}(\varrho_c) > 0$ esetén

$$V''_{eff}(\varrho) = n(n-1)\alpha \varrho^{n-2} + \frac{3N^2}{m\varrho^4}$$

ϱ_c helyen $\frac{N^2}{m\varrho_c^3} = n\alpha \varrho_c^{n-1}$

$$\frac{3N^2}{m\varrho_c^4} = \frac{3}{\varrho_c}\frac{N^2}{m\varrho_c^3} = \frac{3}{\varrho_c} n\alpha \varrho_c^{n-1}$$

$$= 3n\alpha \varrho_c^{n-2}$$

$$V_{eff}''(\varrho_c) = n(n-1)\alpha \varrho_c^{n-2} + 3n\alpha \varrho_c^{n-2}$$

$$= \varrho_c^{n-2} n\alpha \big(\underbrace{(n-1) + 3}_{n+2} \big)$$

ha $n > 0$ ~~$r \to \infty$-re~~ a potenciál akkor vonzó, ha

$\alpha > 0$

$n < 0$ $\alpha < 0$ -ra vonzó

$n > 0$ $\alpha > 0$ $V_{eff}''(\varrho_c) = \varrho_c^{n-2} \underbrace{n\alpha}_{>0} (n+2) > 0$

van stabil körpálya

$n < 0$ $\alpha < 0$ $V_{eff}''(\varrho_c) = \varrho_c^{n-2} \underbrace{n\alpha}_{>0} (n+2) \overset{!}{>} 0$

$n > -2$

esetén van stabil körpálya

(megj: $\varrho_c = \left(\frac{N^2}{nm\alpha} \right)^{1/n+2}$

$\alpha n > 0$ esetén értelmes csak)