Elméleti fizika 1. gyakorlat - 2011. március 17.

1. HF2:

rugó egyensúlyi hossza l_0
megnyúlás: $\Delta l = ?$
körfrekvencia: ω

Megoldás: a mozgásegyenlet radiális komponensét írjuk fel

egyenletes körmozgás: $\underline{a} = \underline{a}_{cp} = -r\omega^2 \underline{e}_r$

centrális erő (rugó): $\underline{F}_{rugó} = -k\Delta l\, \underline{e}_r$

$$r = l_0 + \Delta l$$

a mozgásegyenlet: $m\underline{a} = \underline{F}$
ebbe beírva kapjuk

$$m(l_0+\Delta l)\omega^2 = k\Delta l$$

ahonnan

$$\Delta l = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

$$r = l_0 + \Delta l = l_0 + \frac{m\omega^2 l_0}{k-m\omega^2} = \frac{(k-m\omega^2)l_0 + m\omega^2 l_0}{k-m\omega^2}$$

$$= l_0 \frac{k}{k-m\omega^2}$$

- ha $m\omega^2 > k$ akkor $\Delta l < 0$ és $|\Delta l| > l_0$ adódik: ekkor $r<0$ lenne, ez nem értelmes
- tehát, ha $m\omega^2 > k$, akkor nincs egyensúlyi helyzet, a rugó a "végtelenségig" (valójában, ameddig az $F_{rugó} = -k\Delta l$ érvényes, vagy amíg el nem szakad) nyúlik

2. Sebességrezonancia

egy csillapított oszcillátorra $F = F_0 \cos(\omega t)$ gerjesztő erő hat.

$\omega = ?$ legyen, hogy az oszcillátor sebességamplitúdója maximális legyen?

Megoldás

Mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -\beta \cdot \dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t)$$

m-mel elosztva

$$\ddot{x} + 2\kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

megoldás:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}} \qquad \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{2\kappa\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(levezetés: előadás v. Budó: Mechanika)

sebesség: $\dot{x}(t) = -\underbrace{A\omega}_{v_0} \sin(\omega t - \varphi_0)$

tehát a sebességamplitúdó

$$v_0 = \frac{\omega A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}$$

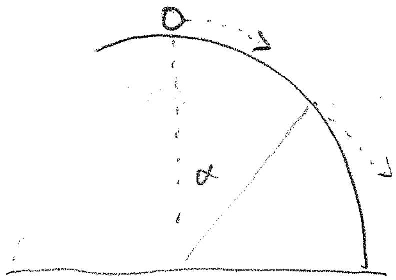
maximum: deriválással

$$\frac{dv_0}{d\omega} = \frac{A}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{\omega A}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2)^{3/2}} \left[-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\kappa^2\omega\right]$$

$\omega = \omega_0$ -ban $\frac{dv_0}{d\omega} = 0$

$\Rightarrow$ maximum $\omega = \omega_0$ -ban $\rightarrow$ SEBESSÉGREZONANCIA

3. Példa a kényszererő meghatározására



Egy félkör keresztmetszetű lejtő tetejéről elhanyagolhatóan kis kezdősebességgel lecsúszik egy test.
Határozzuk meg, hogy hol hagyja el a lejtőt!

Megoldás: – ahol a kényszererő nullává válik

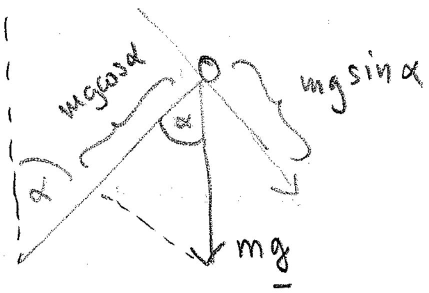
– kényszererő meghatározása: a felületre merőleges

→ felbontjuk a mozgásegyenletet radiális és tangenciális komponensre

→ a sebesség nagyságát nem változtatja

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \qquad m a_{cp} = mg\cos\alpha + K \qquad K: \text{kénysz}$$

$$m a_t = mg\sin\alpha$$



Sebesség meghatározása a függőlegessel bezárt szög (α) függvényében: vagy a tangenciális egyenlet megoldásával (nehéz)

vagy: energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgR\cos\alpha = mgR \qquad \text{(erg. kezdetben)}$$

$$v^2 = 2gR(1-\cos\alpha)$$

ebből $a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\alpha)$

$$K = m(a_{cp} - g\cos\alpha) = mg(2-3\cos\alpha)$$

$\cos\alpha = \frac{2}{3}$ -nál repül le, tangenciális irányban

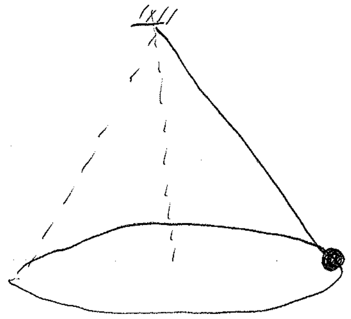
$$\alpha = \arccos\frac{2}{3}$$

4. Gömbi inga

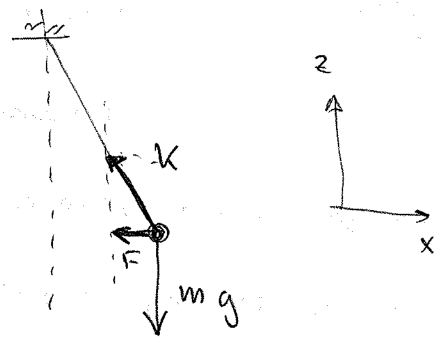
Írjuk le egy l hosszúságú fonálon függő test mozgását!

Milyen kezdőfeltételekkel kell indítani, hogy körpályán mozogjon?

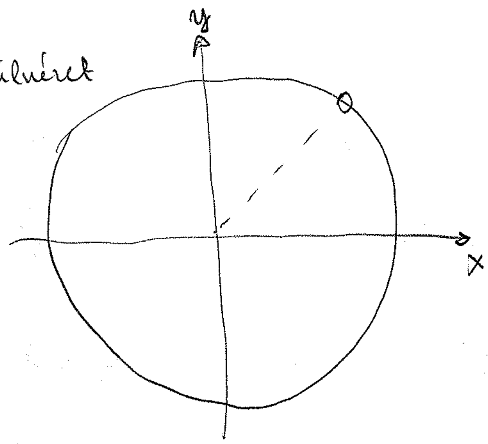
Megoldás:



síkinga:



felülnézet



a síkingánál

$$m\ddot{z} = K\cos\alpha - mg \approx 0$$

$$m\ddot{x} = K\sin\alpha \approx mg\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx mg\frac{x}{l}$$

gömbi inga:

a visszatérítő erő $\nearrow$ a kitéréssel ellentétes

a visszatérítő erő $\searrow$ arányossági tényező $-\dfrac{mg}{l}$

kitérés: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor erő: $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = -\frac{mg}{l}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$ a mozgásegyenlet

komponensekben kiírva:

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\frac{\cancel{m}g}{l}x$$

$$\cancel{m}\ddot{y} = -\frac{\cancel{m}g}{l}y$$

azaz

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y$$

ez két, egymástól független harmonikus rezgés egyenlete

$$x = X\cos(\omega t + \varphi_x) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$y = Y\cos(\omega t + \varphi_y)$$

körpálya: ($t=0$ -t megválasztva)

$$x = R\cos(\omega t)$$

$$y = R\sin(\omega t) = R\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

fontos: φ_x, φ_y eltérése $\frac{\pi}{2}$, amplitúdó azonos

(lehetne $\frac{3\pi}{2}$)

ekkor mi van?

(ellentétes irány)

$$\dot{x} = -R\omega\sin(\omega t)$$

$$\dot{y} = R\omega\cos(\omega t)$$

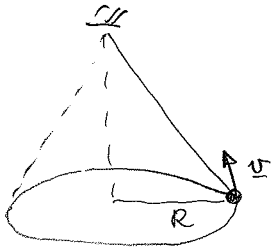
kezdeti feltételek ⇝ hogyan indítsuk

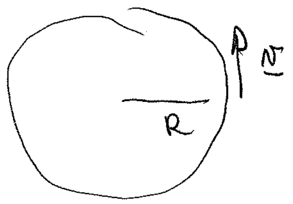
pl. $t=0$

$x(t=0) = R$ $\qquad \dot{x}(t=0) = 0$

$y(t=0) = 0$ $\qquad \dot{y}(t=0) = R\omega$

rajzban:





általában:

kitérés valamilyen irányban

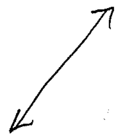
$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sebesség rá merőleges, ω-szoros

$$\underline{v} = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

általános kezdőfeltételek:

$Y = 0$



$X = Y$

$\varphi_x = \varphi_y$

$A_x \neq A_y$

$\varphi_x - \varphi_y = \pm \frac{\pi}{2}$

5. Kúpinga   ha körön kering $\omega = ?$ $K = ?$

mozgásegyenlet rad. irány $a_{cp} = r\omega^2$

$$m r \omega^2 = K \sin\alpha$$

függőleges irány: $0 = K\cos\alpha - mg \quad \Rightarrow \quad K = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow \quad m r \omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha \qquad r = l \sin\alpha$$

$$\cancel{m}\,\cancel{\sin\alpha}\, l\omega^2 = \frac{\cancel{m}g}{\cos\alpha}\cancel{\sin\alpha}$$

ha α kicsi: $\dfrac{1}{\cos\alpha} \approx \dfrac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots} \approx 1 + \dfrac{\alpha^2}{2} + \ldots \qquad \alpha^2 \ll 1$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$