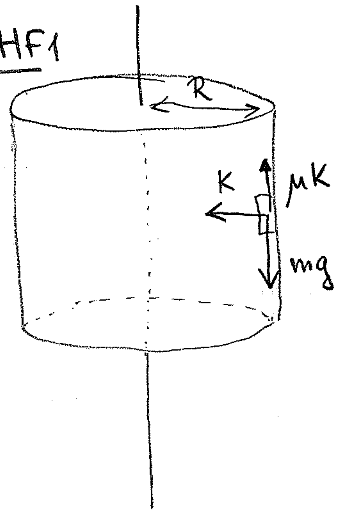
Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2011. március 24.

1.) HF1



a.) felírjuk a mozgásegyenlet függőleges és radiális komponensét; $z = \text{áll.}$ $r = \text{áll.}$

$$0 = \mu K - mg \quad \rightarrow \quad K = \frac{mg}{\mu}$$

$$m \underbrace{a_{cp}}_{\omega^2 r} = K$$

$$m\omega^2 r = K \quad \text{és} \quad r = R$$

$$\omega^2 = \frac{K}{mR} = \frac{g}{\mu R}$$

b.) a teljes, a fal által kifejtett erő:

$$\underline{F}_{fal} = \begin{pmatrix} K \\ \mu K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg/\mu \\ mg \end{pmatrix}$$

nagysága: $F_{fal} = mg\sqrt{1 + 1/\mu^2}$

ha azt akarjuk, hogy $|\underline{F}_{fal}| \leq 4mg$ adódjon

$$1 + \frac{1}{\mu^2} \leq 16$$

$$\mu \geq \frac{1}{\sqrt{15}} \approx 0{,}26$$

pl. gumilapon lehet ilyen nagy a súrlódás.

2. Variációszámítás- emlékeztető

keressük azt az $f(t)$ fv.-t, melyre

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(f(t), \dot{f}(t), t)\, dt$$

max. (vagy min.)

módszer: függvényvizsgálat analógiájára: $F(x)$ x-ben max:

$$F'(x) = 0 \quad \text{azaz} \quad F(x+\delta x) \approx F(x)$$

itt is $f(t)$-hez hozzáadunk egy kis $\delta f(t)$-t, és azt vizsgáljuk,

hogy $\delta I = 0$ legyen: $L(f+\delta f, \dot{f}+\delta\dot{f}, t) = \frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\delta f + L(f, \dot{f}, t)$

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\delta \dot{f}\right] dt$$

de: olyan f függvényekre vizsgáljuk I-t, melyekre $f(t_1) = f_1$, $f(t_2) = f_2$,

akkor viszont $\delta f(t_1) = \delta f(t_2) = 0$, a második tagban parciálisan integrálunk:

$$\delta I = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\delta f\right]_{t_1}^{t_2}}_{\text{ez } 0} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\right]\delta f\, dt$$

$\forall \delta f$-re

$\delta I = 0$ feltétele tehát:

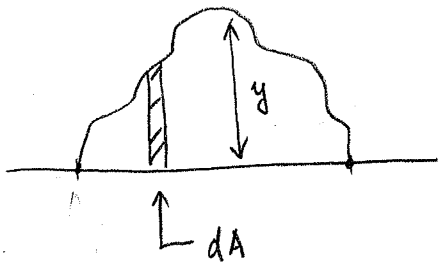
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial L}{\partial f} = 0$$

teljesülése. Ez a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

3. Alkalmazás: két falu

Két falu kötélhúzást rendez, egy L hosszúságú kötéllel. A győztesek a két falu addig egyenes határán lekeríthetnek maguknak a másik földjéből egy akkora darabot, amekkorát csak le tudnak keríteni a kötéllel. Milyen görbével kerítsenek, ha a lehető legnagyobb területet akarják megszerezni?

Megoldás:



a határtól való távolság legyen y

a független változó legyen az addigi kötélhossz, l, $\quad 0 \leq l \leq L$

felületelem

$$dA = y\,dx = y \frac{dx}{dl}\,dl = y\sqrt{1-y'^2}\,dl$$

$$dx^2 + dy^2 = dl^2 \Rightarrow dx^2 = dl^2 - dy^2 = dl^2\left(1 - y'(l)^2\right)$$

a maximalizálandó funkcionál tehát:

$$A[y(l)] = \int_0^L dA(l) = \int_0^L \underbrace{y(l)\sqrt{1-y'^2(l)}}_{f(y(l),\,y'(l),\,l)}\,dl$$

de $f(y, y', l) = f(y, y', \cancel{l})$ $\quad$ l-től explicite nem függ

ekkor bevezetve a

$$B = f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}$$ -t

Beltrami-függvényt

$$\frac{dB}{dl} = \cancel{\frac{\partial B}{\partial l}} + \frac{\partial B}{\partial y}y' + \frac{\partial B}{\partial y'}y'' = 0$$

ha behelyettesítjük, hogy y'' mi (Euler-Lag.-ból)

$$B(y, y') = y\sqrt{1-y'^2} - \frac{y y'^2}{\sqrt{1-y'^2}} \stackrel{!}{=} a$$

ezt y'-re megoldjuk:

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2/a^2}$$

ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2/a^2}} = dl$$

+ előjel választása: kezdetben nőjön

(feltesszük, hogy a lenti falu nyert

$$a \cdot \arcsin \frac{y}{a} = l - l_0$$

Paraméterek (integrálási állandók, a Beltrami-fv. konstansa) azonosítása:

peremfeltételek

$$\left.\begin{array}{ll} l=0\text{-ban} & y(0)=0 \\ l=L\text{-ben} & y(L)=0 \end{array}\right\}$$ tényleg lekerítsen egy területet

$$y(l) = a \sin \frac{l-l_0}{a}$$

$$y(0) = a \sin \frac{-l_0}{a} \quad \Rightarrow \quad \text{ha } y(0)=0 \quad l_0 = 0$$

$$y(L) = a \sin\left(\frac{L}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{L}{\pi}$$

$$y(l) = \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right) \qquad \frac{L}{a} : \text{szög}$$

$$x(l) = ? \qquad x'(l) = \pm\sqrt{1-y'(l)^2} = \sqrt{1 - \frac{L^2\pi^2}{\pi^2 L^2} \cos^2\left(\frac{\pi l}{L}\right)} = \pm \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(l) = \mp \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

ez félkör! max terület adott kerülettel: kör!

4. Tárgyaljuk a bolygómozgást Lagrange-formalizmusban

Megoldás: $L = K - V$

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$ (síkmozgás, legyen a sík $z=0$)

$$V = -\gamma \frac{mM}{r}$$ M: vonzócentrum tömege

általános koordináták használata: r, φ

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

így

$$\dot{x} = -r\sin\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{r}\cos\varphi$$

$$\dot{y} = r\cos\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{r}\sin\varphi$$

ezzel:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \gamma\frac{mM}{r}$$

a megoldás módszere: először a szögegyenletet írjuk fel:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ ciklikus koordináta $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{áll.}$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = J_z$$ impulzusmomentum

megkaptuk az impulzusmomentum megmaradását.

Radiális mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\gamma m M}{r^2}$$

de: $\dot{\varphi} = \frac{J_z}{mr^2}$ $\quad \dot{\varphi}^2 = \frac{J_z^2}{m r^4}$ $\quad m r \dot{\varphi}^2 = \frac{J_z^2}{m r^3}$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{J_z^2}{m r^3} - \frac{\gamma\, mM}{r^2}$$

emlékeztető: $$V_{eff}(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{J_z^2}{2mr^2}$$

$$V_{eff}'(r) = \gamma \frac{mM}{r^2} - \frac{J_z^2}{mr^3} = -\frac{\partial L}{\partial r}$$

az Euler-Lagrange-egyenlet ezzel

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \boxed{m\ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} + \frac{J_z^2}{mr^3}}$$

5. Minek a Lagrange-függvénye

$$L = e^{\alpha t}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}x^2\right)$$

Megoldás: levezetjük az Euler-Lagrange-egyenleteket:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\alpha t} m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \alpha e^{\alpha t} m\dot{x} + e^{\alpha t} m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e^{\alpha t} kx$$

mindent $e^{\alpha t}$-vel elosztva:

$$m\ddot{x} + \underbrace{\alpha m}_{\beta}\dot{x} + kx = 0$$ csillapított oszcillátor

áttérés Hamilton-formalizmusba:

$$H = p\dot{x} - L$$

de: $\dot{x}$-ot ki kell fejezni p-vel

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\alpha t} m \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{1}{m} e^{-\alpha t} p$$

$$H = \frac{e^{-\alpha t}}{m} p^2 - L$$

$$L = e^{\alpha t}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2\right) = e^{-\alpha t}\frac{p^2}{2m} - e^{\alpha t}\frac{k}{2}x^2$$

$$\frac{1}{m^2} e^{-2\alpha t} p^2$$

$$\boxed{H = \frac{e^{-\alpha t}}{2m} p^2 + \frac{e^{\alpha t}}{2} k x^2}$$

nemkonzervatív rendszer, mégis tárgyalható Hamilton-fv-el.