Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2011. április 7.

① Példák a Lagrange-f-ves tárgyalásra

- tömegpont mozgása potenciálos erő hatása alatt:

$$L = K - V = \frac{1}{2} m |\underline{\dot{x}}|^2 - V(\underline{x})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} = m \underline{\dot{x}} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} = m \underline{\ddot{x}} \qquad \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = -\nabla \underline{V}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{x}}$$

$$m \underline{\ddot{x}} = -\nabla V = \underline{F}$$

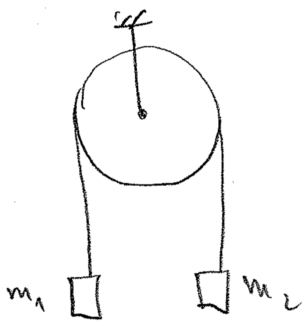
Hamilton-f: $$H = \underline{p}\,\underline{\dot{x}} - L = \frac{p^2}{m} - \left[\frac{1}{2} m \left|\frac{\underline{p}}{m}\right|^2 - V(\underline{x})\right]$$

$$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} = m \underline{\dot{x}} \qquad \underline{\dot{x}} = \frac{\underline{p}}{m}$$

$$= \frac{p^2}{2m} + V(\underline{x})$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} = \frac{\underline{p}}{m} \\ \underline{\dot{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = -\nabla V \end{aligned}\right\} \text{kanonikus egyenletek}$$

- az Atwood-féle ejtőgép



$$L = K - V$$

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_2^2$$

$$V = \underbrace{m_1 g z_1}_{V_1} + \underbrace{m_2 g z_2}_{V_2}$$

kényszer: $z_1 + z_2 = 0$

$z_2 = -z_1$

ezt beleírva:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}_1^2 - (m_1 - m_2) g z_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = \boxed{(m_1+m_2)\ddot{z}_1} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial z_1} = \boxed{-(m_1-m_2) g}$$

2. HF1 megoldás

$$L = e^{\alpha t}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\alpha t} m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\alpha t} m\ddot{x} + \alpha e^{\alpha t} m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e^{\alpha t} m\omega_0^2 x$$

Euler-Lagrange-egy: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$e^{\alpha t} m\ddot{x} + \alpha e^{\alpha t} m\dot{x} + m\omega_0^2 x e^{\alpha t} = 0 \quad / e^{-\alpha t}$$

$$m\ddot{x} + m\alpha\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0 \quad / \frac{1}{m}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Hamilton-f. kiszámoldsa:

$$H = p\dot{x} - L$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\alpha t} m\dot{x} \rightarrow \dot{x} = e^{-\alpha t}\frac{p}{m}$$

$$H = e^{-\alpha t}\frac{p^2}{m} - e^{\alpha t}\left(\frac{1}{2} m e^{-2\alpha t}\frac{p^2}{m} - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\right)$$

$$= e^{-\alpha t}\frac{p^2}{2m} + e^{\alpha t}\frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = e^{-\alpha t}\frac{p}{m} \rightarrow p = e^{\alpha t} m\dot{x}$$

$$\dot{p} = e^{\alpha t} m\ddot{x} + \alpha m e^{\alpha t}\dot{x}$$

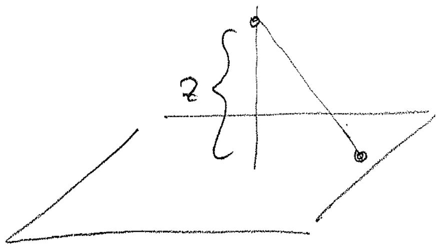
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -e^{\alpha t} m\omega_0^2 x$$

$$\dot{p} - e^{\alpha t} m\omega_0^2 x =$$

$$= e^{\alpha t}(m\ddot{x} + \alpha m\dot{x} + m\omega_0^2 x)$$

3. Gömbi inga

$$L = K - V$$



$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = -mgz$$

kényszerfeltétel: $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$

tudjuk, hogy $z > 0$, z kifejezhető

$$z^2 = l^2 - x^2 - y^2$$

$$z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y} = -\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}}$$

ezzel

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2} \right) + mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$$

az Euler-Lagrange-egyenletek innen egyszerű deriválással (gyakorló HF!)

kis rezgések: sorfejtés kvadratikus rendig:

$$L \approx \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgl - m\frac{g}{l}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$$

azonos mozgásegyenlet:

$$L' = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m \frac{g}{l} (x^2 + y^2)$$

Euler-Lagrange:

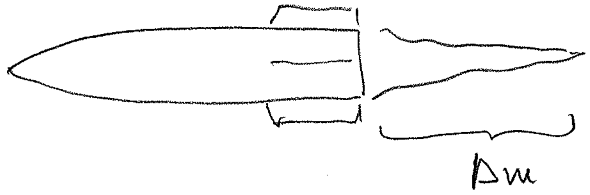
$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + m\frac{g}{l} x = 0 \\ m\ddot{y} + m\frac{g}{l} y = 0 \end{aligned}\right\} \text{rezgés}$$

4. Rakéta mozgása

Rakéta tömege üzemanyaggal feltöltve m, üresen m_0, időegység alatt $-\dot{m} =$ áll. tömegű égésterméket hagyja el a rakétát V sebességgel. Hogy függ a rakéta sebessége az időtől?

<u>Megoldás</u>: impulzusmegmaradás:

$p =$ áll. $\Rightarrow$ Δt idő alatt nem változik



t-ben: $p = m \cdot v$

$t+\Delta t$: $(m - \underbrace{\Delta m}_{|\dot{m}|\Delta t})(v + \underbrace{\Delta v}_{\dot{v}\Delta t}) + \Delta m \underbrace{w}_{v-V}$

$\Delta t \to 0$: Δt^2-es tagokat elhagyjuk

$$m\cancel{v} = m\cancel{v} + \dot{m}\Delta t v + m\dot{v}\Delta t + (-\dot{m}\Delta t)(v - V) + \dots$$

Δt-vel osztva:

$$\dot{m} v + m\dot{v} - \dot{m}(v - V) = 0$$

$$0 = m\dot{v} - \dot{m} V$$

$$\dot{v} = -V \frac{\dot{m}}{m} \Rightarrow v(t) = v_0 - \int_0^t V \frac{\dot{m}}{m} dt = v_0 - V \int_m^{m(t)} \frac{dm}{m} =$$

$$= v_0 - V \log \frac{m(t)}{m}$$

és tudjuk: $m(t) = m + \dot{m} t$

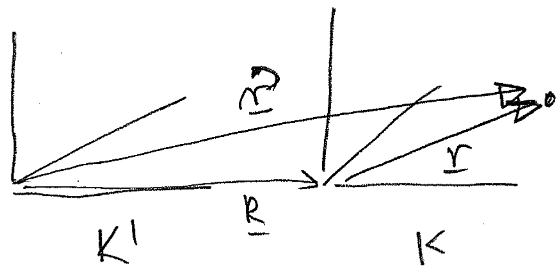
$\dot{m} < 0$ áll., $m(t) < m_0$, a log. negatív

$v(t) > v_0$

5. A szögsebesség vektora

$\underline{\omega} = ?$

ha adott a két K.R.-t összekapcsoló forgásmátrix



Megoldás: $\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r} + \underline{R}$

ahol $\underline{\underline{A}}(t)$ forgásmátrix

$\underline{R}(t)$ K' origójából K origójába mutat

$$\underbrace{\dot{\underline{r}}'}_{\underline{v}'(t)} = \dot{\underline{\underline{A}}}\,\underline{r} + \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\dot{\underline{r}}}_{\underline{v}(t)} + \underbrace{\dot{\underline{R}}}_{\underline{V}(t)}$$

előadáson volt: $\underline{v}' = \underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{\underline{A}}\,\underline{v} + \underline{V}$

mi lehet a kapcsolat?

Mit tud egy forgásmátrix? Megtartja a szögeket → a skalárszorzatot is:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{(\underline{\underline{A}}\,\underline{x})\cdot(\underline{\underline{A}}\,\underline{y})}_{} = \underline{x}\cdot\underline{y} \\ (\underline{\underline{A}}\,\underline{x})^T(\underline{\underline{A}}\,\underline{y}) \\ \underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}}$$

deriválva:

$$\dot{\underline{\underline{A}}}^T \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T \dot{\underline{\underline{A}}} = 0$$

$$\left(\dot{\underline{\underline{A}}}^T \underline{\underline{A}}\right)^T = \underline{\underline{A}}^T \dot{\underline{\underline{A}}}$$

$\Rightarrow$ az $\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}}^T$ mátrix antiszimmetrikus

visszatérve:

$$\dot{\underline{r}}' = \dot{\underline{\underline{A}}} \underline{r} + \underline{\underline{A}} \dot{\underline{r}} + \underline{V}$$

$$\underline{r}' = \underline{\underline{A}} \underline{r} + \underline{R} \quad \rightarrow \quad \underline{r} = \underline{\underline{A}}^T(\underline{r}' - \underline{R})$$

$$\dot{\underline{r}}' = \dot{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}}^T \underline{r}' + \underline{\underline{A}} \dot{\underline{r}} + \underline{V} - \dot{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}}^T \underline{R}$$

ha az adott pillanatban a két k.r. origója egybeesik $\underline{R}(t) = 0$

$$\dot{\underline{r}}' = \underbrace{\dot{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}}^T}_{\underline{\underline{\Omega}}} \underline{r}' + \underline{\underline{A}} \dot{\underline{r}}$$

de hogy lesz ebből $\underline{v}' = \underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{v}$

ha a tengelyek is épp egybeesnek $\underline{\underline{A}} = 1$ az adott pillanatban

$$\underline{\omega} \times \underline{r}' = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z' - \omega_z y' \\ \omega_z x' - \omega_x z' \\ \omega_x y' - \omega_y z' \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés: felírható a mátrixa

$$\underline{\omega} \times \underline{r}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

épp egy antiszimm. mátrix! ez lesz $\underline{\underline{\Omega}}$