Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2011. április 14.

1. HF1. megoldása

forgó koordinátarendszer:

K : inerciális k.r. helyvektor: $\underline{r}$

K' : forgó k.r. helyvektor: $\underline{r}'$

minden pillanatban

$$\underline{r} = \underline{\underline{O}}\,\underline{r}' + \underline{R}$$

$\underline{\underline{O}}$: időfüggő forgásmátrix

sebesség számolása:

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{\underline{O}}}\,\underline{r}' + \underline{\underline{O}}\,\dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{R}}$$

de: $\underline{r}' = \underline{\underline{O}}^T(\underline{r} - \underline{R})$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{\underline{O}}}\,\underline{\underline{O}}^T\underline{r} - \dot{\underline{\underline{O}}}\,\underline{\underline{O}}^T\underline{R} + \underline{\underline{O}}\,\dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{R}}$$

$\underline{\underline{O}}$ forgásmátrix: $\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{O}}^T = \mathbb{1}$

ezt deriválva: $\dot{\underline{\underline{O}}}\,\underline{\underline{O}}^T + \underline{\underline{O}}\,\dot{\underline{\underline{O}}}^T = 0$

legyen $\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{O}}}\,\underline{\underline{O}}^T$ $\qquad \underline{\underline{\Omega}}^T = \underline{\underline{O}}\,\dot{\underline{\underline{O}}}^T$

$$\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}}^T = 0$$

tehát $\underline{\underline{\Omega}}$ antiszimmetrikus mátrix

$$\dot{\underline{r}} = \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{r} - \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{R} + \underline{\underline{O}}\,\dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{R}}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\Omega}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\Omega}}$ általános antiszimmetrikus mátrix

$$\dot{\underline{r}} = \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\underline{\Theta}}\, \dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{R}}$$

általános szabadvektorra

$$\underline{u} = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{u}'$$

$$\dot{\underline{u}} = \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\, \underline{u}' + \underline{\underline{\Theta}}\, \dot{\underline{u}}'$$

$$\dot{\underline{u}} = \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\, \underline{\underline{\Theta}}^T \underline{u} + \underline{\underline{\Theta}}\, \dot{\underline{u}}'$$

$$= \underline{\omega} \times \underline{u} + \underline{\underline{\Theta}}\, \dot{\underline{u}}'$$

ha az adott pillanatban éppen egy irányban áll K és K'

$$\dot{\underline{u}} = \underline{\omega} \times \underline{u} + \dot{\underline{u}}'$$

szokásos jelölés még: $$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{u} + \frac{d'\underline{u}}{dt'}$$

ha $$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ z tengely körüli forgatás

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\, \underline{\underline{\Theta}}^T$$

$$\dot{\underline{\underline{\Theta}}} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\varphi} \qquad \underline{\underline{\Theta}}^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

így

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{O}}}\,\underline{\underline{O}}^T = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ált.} \quad \underline{\omega}\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

tehát $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$ spec. $\varphi = \omega t$ esetén $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

ami épp az, amit vártunk

2. Ütközések

– mit tudunk mondani két test ütközéséről?

Mi az ütközés?

$\neq$ merev!

- két vagy több mozgó szilárd test érintkezik
- a köztük ható erők nagyok, a deformációk kicsik

A deformációk leírása nagyon nehéz feladat lenne, ezért most egy egyszerűbb problémát vizsgálunk: gömb alakú tárgyak (~biliárdgolyók) ütközését.

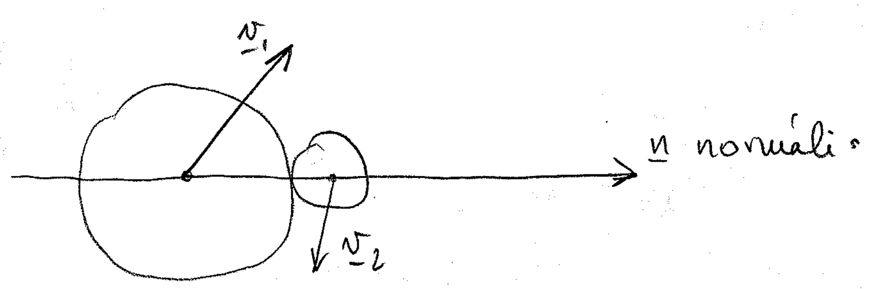
Az ütközés rövid ideig tart → az erő rövid ideig hat

→ nem a mozgásegyenletet oldjuk meg, hanem a megmaradó mennyiségeket vizsgáljuk

→ "hirtelen" impulzusmegváltozással számolunk

→ kiindulás: sebességek az ütközés előtt

eredmény: sebességek az ütközés után



centrális ütközés: az ütközési normális (felületek normálisa az ütközési pontban) és a 2 test tömegközéppontját összekötő egyenes megegyezik-e

egyenes / ferde ütközés: attól függően, hogy az ütközés előtt a 2 sebesség vektora egy egyenesbe esik-e

impulzusmegmaradás:

$$m_1 \underline{v}_1' + m_2 \underline{v}_2' = m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2$$

az ütközés során nem feltétlenül áll fenn a mechanikai energia megmaradásának az elve (a fellépő erők lehetnek nemkonzervatívak → hő fejlődés, szerkezet megváltoztatására fordított energia)

Speciális esetek:

a.) rugalmas ütközés

$$m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

b.) tökéletesen rugalmatlan ütközés során a sebességek ütközési normális irányú komponense az ütközés után azonos lesz,

$$v_{1n}' = v_{2n}'$$

c.) általános eset:

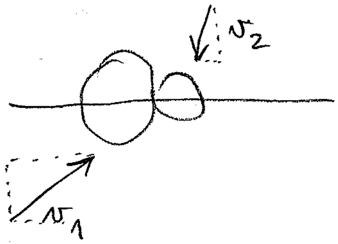
$$\frac{v_{1n}' - v_{2n}'}{v_{2n} - v_{1n}} = \varepsilon \qquad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{teljesen rugalmas} \\ 0 & \text{teljesen rugalmatlan} \end{cases}$$

Egyenes ütközések leírása

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

$$\frac{v_1'-v_2'}{v_2-v_1}=\varepsilon \quad \Rightarrow \quad v_1', v_2' \text{ kifejezhető}$$

Ferde ütközések leírása



$$\underline{v}_1=\underline{v}_{1n}+\underline{v}_{1t}$$

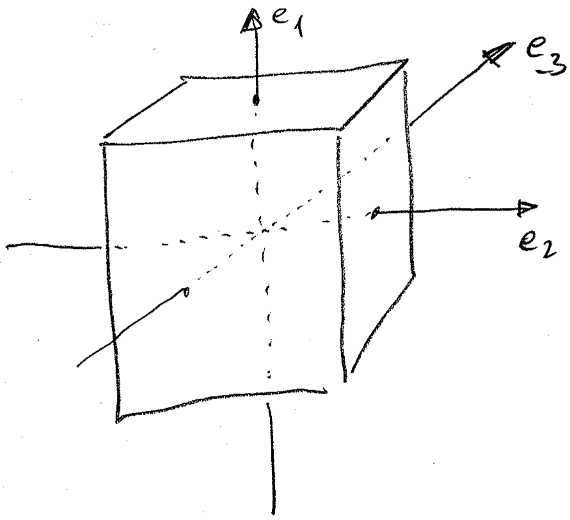
$$\underline{v}_2=\underline{v}_{2n}+\underline{v}_{2t}$$

normális és tangenciális komponensekre való felbontás

feltesszük, hogy $\underline{v}_{1t}'=\underline{v}_{1t}$ $\quad \underline{v}_{2t}'=\underline{v}_{2t}$

a normális komponensekre: mint az előbb

3. Merev test fő tehetetlenségi tengelyek körüli forgása



főtengelyrendszer

$$\underline{\underline{\Theta}}=\begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$$

feltesszük: $A<B<C$

a mozgást leíró Euler-egyenletek:

$$A\dot{\omega}_1=(B-C)\,\omega_2\omega_3$$

$$B\dot{\omega}_2=(C-A)\,\omega_1\omega_3$$

$$C\dot{\omega}_3=(A-B)\,\omega_1\omega_2$$

stabilitásvizsgálat: $\underline{\omega}=\underline{\omega}+\delta\underline{\omega}$, feltesszük:

$\underline{\omega}=$ áll. mego, $\delta\underline{\omega}$ kicsi

a) $\underline{e}_1$ körüli forgás: $\underline{\omega} = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{tényleges mego.} \\ \underline{\omega}_0}} + \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}}_{\delta\underline{\omega}}$

linearizált egy:

$A\dot{p} = 0 \quad \rightarrow \quad p = \text{áll.}$

$B\dot{q} = (C-A)\omega_0 r$

$C\dot{r} = (A-B)\omega_0 q$

$$B\ddot{q} = (C-A)\omega_0 \dot{r} = \frac{(C-A)(A-B)\omega_0^2 q}{C}$$

$$\ddot{q} = \underbrace{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}}_{\lambda^2 < 0} \omega_0 q$$

$C > A, \ B > A \qquad B, C > 0$

$\rightarrow$ rezgésegyenlet $\qquad q \sim \cos(\lambda t)$ a mego. $\rightarrow$ stabil

b.) $\underline{e}_2$ körüli forgás: $\underline{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \delta\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

$A\dot{p} = (B-C)\omega_0 r$

$B\dot{q} = 0 \quad \rightarrow q = \text{áll.}$

$C\dot{r} = (A-B)\omega_0 p$

$$C\ddot{r} = (A-B)\omega_0 \dot{p} = \frac{(A-B)(C-A)}{B}\omega_0^2 r$$

$$\ddot{r} = \underbrace{\frac{(A-B)(C-A)}{BC}}_{\lambda^2 > 0} \omega_0^2 r$$

$r \sim e^{\lambda t}$ növekvő mego $\rightarrow$ instabil

c.) $\underline{e}_3$ körüli forgás:

$\underline{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \qquad \delta\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

$$A\ddot{p} = (B-C)\omega_0 \dot{q} = \frac{(B-C)(C-A)}{B}\omega_0^2 p$$

$A\dot{p} = (B-C)\omega_0 q$

$B\dot{q} = (C-A)\omega_0 p$

$C\dot{r} = 0 \Rightarrow r = \text{áll.}$

$$\ddot{p} = \underbrace{\frac{(B-C)(C-A)}{AB}}_{\lambda^2 < 0} \omega_0^2 p$$

ez is rezgés $\rightarrow$ stabil $\qquad p \sim \cos(\lambda t)$