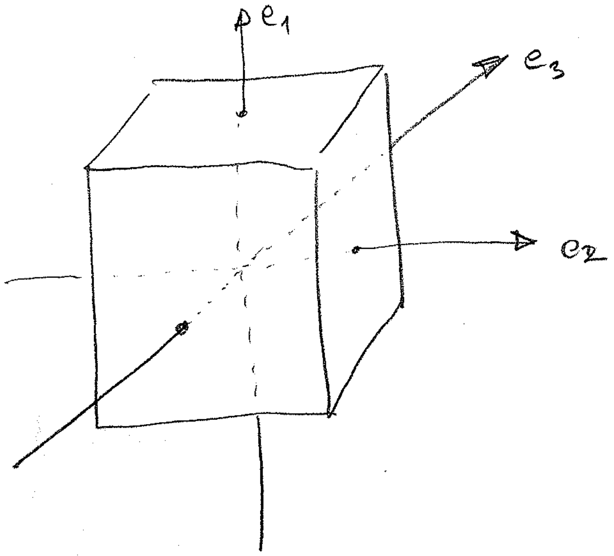
Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2011. április 28.

ZH: május 12 ~~délelőtti sávnál!~~ előtte kedd? 8-tól (előadás első fele)

1. Merev test forgása a fő tehetetlenségi tengelyek körül



főtengelyrendszer:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$$

feltesszük: $A < B < C$

a mozgást a főtengelyrendszerben az Euler-egyenletek írják le:

$$A\dot{\omega}_1 = (B-C)\,\omega_2\omega_3$$

$$B\dot{\omega}_2 = (C-A)\,\omega_1\omega_3$$

$$C\dot{\omega}_3 = (A-B)\,\omega_1\omega_2$$

stabilitásvizsgálat: $\underline{\omega} = \underline{\omega}_0 + \delta\underline{\omega}$

vizsgáljuk, hogy ha $\underline{\omega}_0 =$ áll. megoldás, akkor $\delta\omega$ nő-e?

(Ha nő: instabilitás.)

a.) $\underline{e}_1$ körüli forgás: $\underline{\omega} = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\omega}_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}}_{\delta\underline{\omega}}$

$\delta\omega$-ban linearizáljuk az egyenleteket:

$$A\dot{p} = 0 \quad \longrightarrow \quad p = \text{áll.}$$

$$\left.\begin{aligned} B\dot{q} &= (C-A)\,\omega_0 r \\ C\dot{r} &= (A-B)\,\omega_0 q \end{aligned}\right\} \nearrow \quad B\ddot{q} = (C-A)\,\omega_0\dot{r} = \frac{(C-A)(A-B)}{C}\,\omega_0^2 q$$

azaz:

$$\ddot{q} = \underbrace{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}\,\omega_0^2}_{-\lambda^2} q$$

$$C > A,\ B > A \ : \ B, C > 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^2 < 0$$

$\rightarrow$ rezgésegyenlet $\quad q \sim q_0 \cos(\lambda t)$ a megoldás $\rightarrow$ stabil

b.) $\underline{e}_2$ körüli forgás:

$$\underline{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \delta\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} &= (B-C)\,\omega_0 r \\ B\dot{q} &= 0 \quad \Rightarrow q = \text{áll.} \\ C\dot{r} &= (A-B)\,\omega_0 p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad C\ddot{r} = (A-B)\,\omega_0 \dot{p} = \frac{(A-B)(C-A)}{B}\,\omega_0^2 r$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \underbrace{\frac{(A-B)(C-A)}{BC}\,\omega_0^2}_{\lambda^2 > 0} r$$

$$r \sim e^{\lambda t}$$ növekvő mego. $\Rightarrow$ <u>instabilitás</u>

c.) <u>$\underline{e}_3$ körüli forgás:</u>

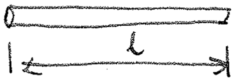
$$\underline{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \qquad \delta\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} &= (B-C)\,\omega_0 q \\ B\dot{q} &= (C-A)\,\omega_0 p \\ C\dot{r} &= 0 \quad \Rightarrow r = \text{áll.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A\ddot{p} = (B-C)\,\omega_0 \dot{q} = \frac{(B-C)(C-A)}{B}\,\omega_0^2 p$$

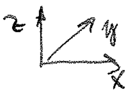
$$\ddot{p} = \underbrace{\frac{(B-C)(C-A)}{AB}\,\omega_0^2}_{\lambda^2 \ngtr 0} p$$

ez is rezgés $\Rightarrow$ stabil

2. Tehetetlenségi nyomaték számolása



l hosszúságú pálca, egyenletes sűrűségű



$$\underline{\underline{\Theta}} = \int d^3x \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \varrho(x,y,z)$$

a pálca vékony, y és z irányú kiterjedését elhanyagoljuk

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$ vonalmenti sűrűség

$$\varrho(x,y,z) = \begin{cases} \lambda\,\delta(y)\,\delta(z) & -l/2 \le x \le l/2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

integrálás elvégzése: $y=0$, $z=0$ beírható, csak x-ben integrálunk

$$\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \lambda \, dx = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \lambda \left[x^3/3 \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$= 2\lambda \frac{l^3}{24} = \frac{\lambda l^3}{12} = \frac{1}{12} m l^2$$

$m = \lambda l$ össztömeg

3. A Steiner-tétel bizonyítása

mekkora a tehetetlenségi nyomaték, ha az origót eltoljuk

$$K: \quad \underline{\underline{\Theta}} = \int d^3x \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

K': $\underline{\underline{\Theta}}'$ eltolt tengely körül x, y, z helyére x', y', z'-t írunk

ha K' középpontja (X, Y, Z), akkor

$$x' = x - X$$
$$y' = y - Y$$
$$z' = z - Z$$

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \int d^3x \begin{pmatrix} (y-Y)^2+(z-Z)^2 & -(x-X)(y-Y) & -(x-X)(z-Z) \\ -(x-X)(y-Y) & (x-X)^2+(z-Z)^2 & -(y-Y)(z-Z) \\ -(x-X)(z-Z) & -(y-Y)(z-Z) & (x-X)^2+(y-Y)^2 \end{pmatrix}$$

$d^3x' = d^3x$

a zárójeleket felbontva:

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \underbrace{\int d^3x \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \varrho(x,y,z)}_{\underline{\underline{\Theta}}}$$

$$+ \int d^3x \begin{pmatrix} -2yY - 2zZ & +xY + yX & +xZ + zX \\ +xY + yX & -2xX - 2zZ & +yZ + zY \\ +xZ + zX & +yZ + zY & -2xX - 2yY \end{pmatrix} \varrho(x,y,z)$$

$$+ \int d^3x \begin{pmatrix} Y^2+Z^2 & -XY & -ZX \\ -XY & X^2+Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2+Y^2 \end{pmatrix} \varrho(x,y,z)$$

legyen K a tömegközéppont rendszer: ekkor K-ban

$$\int x\,\rho(x,y,z)\,d^3x = \int y\,\rho(x,y,z)\,d^3x = \int z\,\rho(x,y,z)\,d^3x = 0$$

$\Rightarrow$ a második tag eltűnik

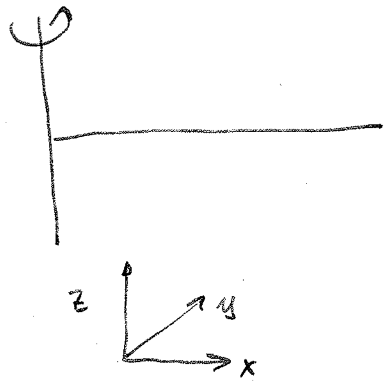
a harmadik tagban a mátrix állandó!

$$\int \rho(x,y,z)\,d^3x = m \qquad \text{tömeg}$$

kaptuk

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \underline{\underline{\Theta}}_{TKP} + m\begin{pmatrix} Y^2+Z^2 & -XY & -ZX \\ -XY & X^2+Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2+Y^2 \end{pmatrix}$$

alkalmazás: vége körül megpörgetett pálca



$X = -\frac{l}{2}$ az új centrumba mutató vekto.

$$\Theta'_{zz} = \Theta^{TKP}_{zz} + mX^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

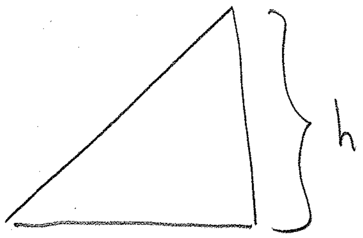
$$\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

közvetlen számolással:

$$\Theta'_{zz} = \lambda\int_0^l x^2\,dx = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

4. Golyó legurulása lejtőn

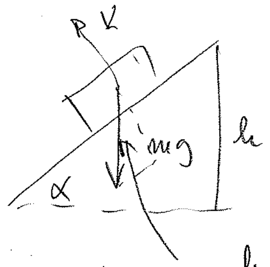


lecsúszó kő (súrlódásmentes)

$$T + V = \text{áll.}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad V = mgh$$

ha fent $v = 0$ $\quad v_{lent} = \sqrt{2gh}$



$K = mg\cos\alpha$

$S = \mu K = \mu mg\cos\alpha$

ha súrlódás is van:

$$v_{lent} = \sqrt{2gh(1-\mu)}$$

$\frac{h}{\cos\alpha}$ $\qquad S \cdot s = \mu mg\cos\alpha \cdot \frac{h}{\cos\alpha} = \mu mgh$

$$T_{lent} = V_{fent} - W_{súrl.} = mgh - \mu mgh$$

[ha $\mu mg\cos\alpha > mg\sin\alpha$: nem indul el!]

golyó: $\quad T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2$

tapadási kényszer: $\quad v = \omega R$

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right) v^2 \qquad V = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh} \, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Theta}{mR^2}}}$$

gömb esetén $\quad \Theta = \frac{2}{5} m R^2 \qquad v = \sqrt{2gh\frac{5}{7}}$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} \approx 0\,8452$$

$$\frac{5}{7} \approx 0{,}7143$$

ha $\mu > \frac{2}{7} \approx 0{,}2857$: a golyó ér le nagyobb sebességgel