HF1. Spirális

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ v_z t \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$v(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2} =: v \qquad \text{(állandó!)}$$

ívhossz: $$s(t) = \int_0^t v(t')\,dt' = vt$$

tehát $t = \frac{s}{v}$ $$\underline{r}(s) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{\omega}{v}s \\ R\sin\frac{\omega}{v}s \\ v_z/v \; s \end{pmatrix}$$

$\frac{\omega}{v} =: \tilde{\omega}$
$v_z/v =: \tilde{v}_z$
jelölésekkel

- ez a spirális ívhosszparaméterezéssel

$$\underline{r}(s) = \begin{pmatrix} R\cos\tilde{\omega}s \\ R\sin\tilde{\omega}s \\ \tilde{v}_z s \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}'(s) = \begin{pmatrix} -R\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}s \\ R\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}s \\ \tilde{v}_z \end{pmatrix} \qquad |\underline{r}'(s)| = \sqrt{R^2\tilde{\omega}^2 + \tilde{v}_z^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{R^2\omega^2}{v^2} + \frac{v_z^2}{v^2}} = \frac{1}{v}\sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2} = 1$$

- tehát $\underline{r}'(s)$ egységvektor, ő az

<u>érintő egységvektor</u> $\underline{T}(s) = \underline{r}'(s)$

görbület: $$\kappa = |\underline{r}''(s)| = R\tilde{\omega}^2 = R\frac{\omega^2}{v^2} = R\frac{\omega^2}{R^2\omega^2 + v_z^2}$$

ui.: $$\underline{r}''(s) = \begin{pmatrix} -R\tilde{\omega}^2\cos\tilde{\omega}s \\ -R\tilde{\omega}^2\sin\tilde{\omega}s \\ 0 \end{pmatrix}$$

görbületi sugár
$$R_g = \frac{1}{\kappa} = \frac{R^2\omega^2 + v_z^2}{R\omega^2}$$

(előadáson R-rel jelölte Bene prof., de itt R már foglalt)

Normális:

$$\underline{N} = R_g \frac{d\underline{T}}{ds} = R_g\, \underline{r}''(s) = \frac{R^2\omega^2 + v_z^2}{R\omega^2} \begin{pmatrix} -R\tilde{\omega}^2 \cos\tilde{\omega}s \\ -R\tilde{\omega}^2 \sin\tilde{\omega}s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\omega}s) \\ -\sin(\tilde{\omega}s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

az $\tilde{\omega}^2$-ek helyére mi. beírható

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{R^2\omega^2 + v_z^2}$$

binormális egységvektor

$$\underline{B} = \underline{T} \times \underline{N} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_z \sin(\tilde{\omega}s) \\ -\tilde{v}_z \cos(\tilde{\omega}s) \\ R\tilde{\omega} \end{pmatrix}$$

torzió: $\underline{B}'(s) = -\tau \cdot \underline{N}$

így τ leolvasható valamelyik komponensből

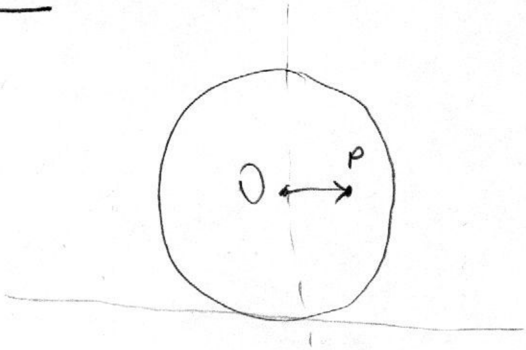
$$\underline{B}'(s) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_z \tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega}s) \\ \tilde{v}_z \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}s) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{N}(s) = \begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\omega}s) \\ -\sin(\tilde{\omega}s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

látható:

$$\tau = \tilde{v}_z \tilde{\omega} = \frac{v_z \omega}{v^2} = \frac{v_z \omega}{R^2\omega^2 + v_z^2}$$

HF2. Ciklois

a.)



Középpont helye:

$$\underline{r}_0(t) = \begin{pmatrix} R\omega t \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

középpontból P-be mutató vektor:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \rho\cos\omega t \\ -\rho\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

így a vizsgált pont helyvektora

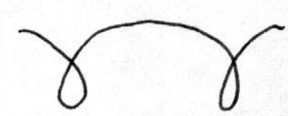
- $$\underline{r}(t) = \underline{r}_0(t) + \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} R\omega t + \rho\cos\omega t \\ R - \rho\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

érdemes lerajzolni, pl. számítógéppel:

$R=2$, $\rho=1$

$R=1$, $\rho=1$

$R=1$, $\rho=2$



- sebesség

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} R\omega - \rho\omega\sin\omega t \\ -\rho\omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\rho\omega^2\cos\omega t \\ -\rho\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

c.) vázlat

$$v(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

érintő : $\underline{T}(t) = \dfrac{1}{|\underline{v}(t)|} \underline{v}(t)$

$$a_n(t) = v'(t) = \frac{d|\underline{v}(t)|}{dt}$$

$$\underline{a}(t) = a_n(t)\,\underline{T}(t) + \frac{v^2(t)}{R_g(t)}\,\underline{N}(t)$$

R_g: görb. sugár

$$\underline{a}_{cp}(t) = \underline{a}(t) - a_n(t)\,\underline{T}(t)$$

$\underline{N}(t) = \dfrac{\underline{a}_{cp}(t)}{|\underline{a}_{cp}(t)|}$ megvan a normális

$|\underline{a}_{cp}(t)| = \dfrac{v^2}{R}$ $R_g = \dfrac{v^2}{|a_{cp}(t)|}$

megvan a görbületi sugár

3. Kis számolási gyakorlat

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} bt \\ ct^2 - dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

sebesség:

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} b \\ 2ct - d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{b^2 + (2ct - d)^2}$$

$\uparrow$
sebesség nagysága

gyorsulás:

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \text{állandó}$$

$$a(t) = |\underline{a}(t)| = 2|c| = \text{áll.}$$

Megj: egy kicsit általánosabban szerepelt a gyakorlaton (a derékszögű koordinátáknál)