ZH megoldások – "A" csoport

① polárkoordinátákban $r = bt \quad \varphi = \omega t$

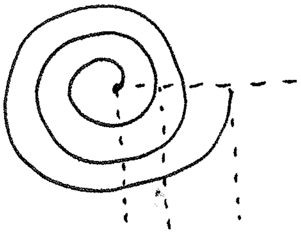
derékszögűbe transzformálva:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bt\cos(\omega t) \\ bt\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{r} = r(t)\cdot \underline{e}_r$$

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

rajz:



$\varphi = n\cdot 2\pi \Rightarrow t = \dfrac{2\pi n}{\omega}$

$(n \in \mathbb{Z})$

$r = \dfrac{2\pi n}{\omega} b$

derékszögűben

$$\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sebesség:

$\underline{r} = r\cdot\underline{e}_r$ -et deriválva $\qquad \dot r = b \quad \dot\varphi = \omega$

$$\dot{\underline{r}} = \dot r\,\underline{e}_r + r\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi = b\,\underline{e}_r + bt\omega\,\underline{e}_\varphi$$

$\ddot r = \ddot\varphi = 0$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot r\,\underline{e}_r + 2\dot r\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi + r\ddot\varphi\,\underline{e}_\varphi - r^2\dot\varphi^2\,\underline{e}_r = -bt\omega^2\,\underline{e}_r + 2b\omega\,\underline{e}_\varphi$$

derékszögűben: $\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ – t beírva

(vagy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \ldots$ -ot 2x deriválva)

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} b\cos(\omega t) - bt\omega\sin(\omega t) \\ b\sin(\omega t) + bt\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} -bt\omega^2\cos(\omega t) - 2b\omega\sin(\omega t) \\ -bt\omega^2\sin(\omega t) + 2b\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

(2) kinetikus energia:

kezdetben: $K = \frac{1}{2} m v_0^2$

végén: $K' = \frac{1}{2} m n^2 v_0^2$

a különbség a munka

$$W = K' - K = \frac{1}{2}(n^2-1) m v_0^2$$

a munkatétel szerint.

Állandó erő esetén

$$W = F \cdot s$$

így az út $\boxed{s = \frac{W}{F} = \frac{n^2-1}{2F} m v_0^2}$

(3) Lásd a március 17-ikei gyakorlaton

(4) a körpálya: $r = r_c$ ahol az effektív potenciál deriváltja 0

$r = r_c$: $V_{eff}'(r_c) = 0$

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

$$V_{eff}'(r) = V'(r) - \frac{N^2}{mr^3} \Rightarrow \frac{N^2}{mr_c^3} = V'(r_c)$$

rezgési frekv.

$m\omega^2 = V_{eff}''(r_c)$ $\quad V_{eff}''(r) = V''(r) + 3\frac{N^2}{mr^4}$ ebbe r_c-t a fentiből:

$$m\omega^2 = V''(r_c) + \frac{3V'(r_c)}{r_c} = F'(r_c) + \frac{3F(r_c)}{r_c}$$

(5) a végtelenbe távozáshoz szükséges idő

$$T = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$ a gyakorlaton tanult módon

Energia $E = \text{áll.}$; x_0-ban kiszámolva

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(x_0) = \frac{1}{2} m \frac{2 a x_0^7}{m} + a x_0^7 = 0$$

tehát

$$T = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} a x^7}} = \sqrt{\frac{m}{2a}} \underbrace{\int_{x_0}^{\infty} x^{-7/2}\, dx}_{-\frac{2}{5} x^{-5/2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{2a}} \left[\frac{2}{5} x^{-5/2} \right]_{x_0}^{\infty} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{m}{2a}}\, x_0^{-5/2}$$