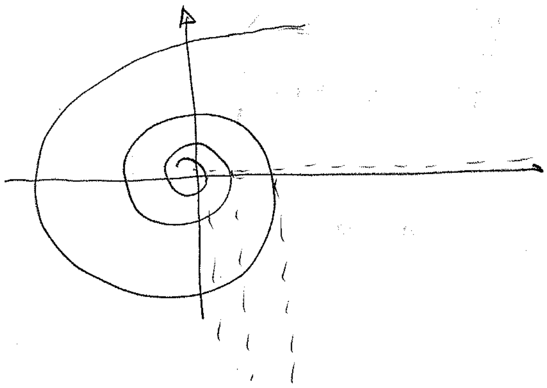
ZH megoldások - "B" csoport

① polárkoordinátákban $r = bt \quad \varphi = \frac{c}{t}$

derékszögűbe transzformálva

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bt\cos\frac{c}{t} \\ bt\sin\frac{c}{t} \end{pmatrix}$$



$\varphi = 2n\pi \stackrel{!}{=} \frac{c}{t}$

$t = \frac{c}{2\pi n}$

$r = bt = \frac{bc}{2\pi n}$

derékszögűben:

$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

sebesség:

$$\underline{r} = r(t)\,\underline{e}_r(\varphi(t))$$

ezt deriválva:

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi = b\,\underline{e}_r + \underbrace{bt\left(-\frac{c}{t^2}\right)}_{-\frac{bc}{t}} e_\varphi$$

$r = bt \qquad \varphi = c/t$

$\dot{r} = b \qquad \dot{\varphi} = -c/t^2$

$\ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\varphi} = 2c/t^3$

gyorsulás:

$$\ddot{\underline{r}} = (\ddot{r} - r^2\dot{\varphi}^2)\,\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,e_\varphi$$

$$= \underbrace{\left(-b^2t^2\frac{c^2}{t^4}\right)}_{-\frac{b^2c^2}{t^2}} \underline{e}_r + \underbrace{\left(-2b\frac{c}{t^2} + bt\frac{2c}{t^3}\right)}_{-2\frac{bc}{t^2} + \frac{2bc}{t^2} = 0} e_\varphi = -\frac{b^2c^2}{t^2}\,\underline{e}_r$$

derékszögűre átírva:

$$\underline{v} = b\,\underline{e}_r - \frac{bc}{t}\,e_\varphi = \begin{pmatrix} b\cos\frac{c}{t} + \frac{bc}{t}\sin\frac{c}{t} \\ b\sin\frac{c}{t} - \frac{bc}{t}\cos\frac{c}{t} \end{pmatrix}.$$

$t \to \infty \qquad \underline{v} \to \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ a görbe vízszintes egyeneshez simul

$$\underline{a} = -\frac{b^2c^2}{t^2}\,\underline{e}_r = -\frac{b^2c^2}{t^2}\begin{pmatrix} \cos\frac{c}{t} \\ \sin\frac{c}{t} \end{pmatrix}$$

$t \to \infty \qquad \underline{a} \to 0$

(2) h magasságban v sebességgel eldobott kavicsnál

$$m\ddot{z} = -mg$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

kezdőfeltételek: $z_0 = h \qquad v_0 = v$

$$z(t) = h + vt - \frac{1}{2}gt^2$$

ennek a nullahelyét keressük

$$t = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2gh}}{g}$$

„$-$" : negatív értéket kapnánk $\to$ hamis gyök

$$t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gh}}{g} > 0$$

③ Lásd a március 17-ikei HF megoldások között!

④ Lásd az "A" csoportnál!

⑤ a végtelenbe távozáshoz szükséges idő:

$$T = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

(ahogy a gyakorlaton szerepelt)

Energia megmarad: $E = \text{áll.}$; kiértékeljük x_0-ban

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(x_0) = \frac{1}{2} m \frac{2a x_0^5}{m} + (-a x_0^5) = 0$$

így

$$T = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} a x^5}} = \sqrt{\frac{m}{2a}} \underbrace{\int_{x_0}^{\infty} x^{-5/2}\, dx}_{-\frac{2}{3} x^{-3/2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{2a}} \left[\frac{2}{3} x^{-3/2}\right]_{x_0}^{\infty} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m}{2a}}\, x_0^{-3/2}$$