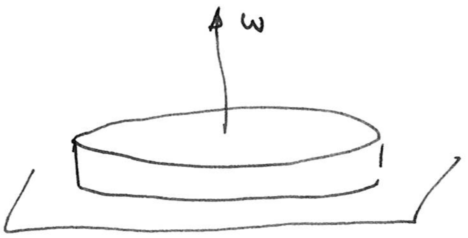
Elm. Fiz. Példatár 12.33



z tengely körül forgó korong, súrlódással

R: sugár

M: tömeg

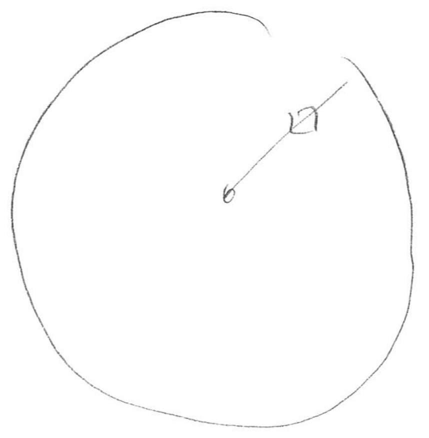
μ: súrl. együttható

ω_0: kezdeti szögsebesség

Mego: $M\ddot{\underline{r}} = -\mu K \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}$ ez ismert

$$\Theta\dot{\omega} = M_z$$

súrlódási erő forgatónyomatéka:



teljes nyomóerő: Mg

ebből dA felületen $dF = \frac{Mg\mu}{A} dA$

$$A = R^2\pi$$

forgatónyomaték

$$dM_z = r\,dF = \mu \frac{Mg\,r}{R^2\pi} dA$$

$dA = r\,dr\,d\vartheta$

$$M_z = \int_0^R r\,dr \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \; \frac{Mg\,r}{R^2\pi} = \frac{2Mg\mu}{R^2} \int_0^R r^2\,dr$$

$$= \frac{Mg\mu}{R^2} \frac{2}{3} R^3 = \frac{2}{3}\mu M g R$$

és M N-nel ellentétes irányú

$$\Theta = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\Theta \dot{\omega} = M_z$$

$$\frac{1}{2} M R^2 \dot{\omega} = -\frac{2}{3} \mu M g R$$

$$\dot{\omega} = -\frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}$$

$\omega = \omega_0$ -ról $\qquad T = -\frac{\omega}{\dot{\omega}} = \frac{3 R \omega_0}{4 \mu g}$ idő múlva

áll meg

Poisson-zárójelek

Emlékeztető: Hamilton-féle kanonikus egyenletek:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

a fázistéren értelmezett $f(q,p,t)$ függvényre:

$$\frac{d}{dt} f(q(t), p(t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{F} \left[\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p_i} \dot{p}_i \right]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{F} \left[\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

ahol

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{F} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]$$

emlékeztető:

$\{\,,\,\}$ bilineáris, antiszimmetrikus

$\{f g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\} g$ Leibnitz

$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ Jacobi megj: Lie-algebra

Példa: $f = f(q_j)$ (nincs p, egy adott j)

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{F} \Big[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial q_i}}_{\uparrow} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial p_i}}_{0} \frac{\partial g}{\partial q_i} \Big]$$

$i=j$-re $f'(q_j)$

$i \neq j$-re 0

$$= f'(q_j) \frac{\partial g}{\partial p_j}$$

Mj: $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Időtől expl. nem függő mennyiségekre:

$$\dot{f} = \{f, H\} \qquad f = f(q, p)$$

f megmarad: $\{f, H\} = 0$

Áll (Poisson tétele): $\{f, H\} = 0$, $\{g, H\} = 0$

$\Rightarrow$ $\{f, g\}$ is megmarad

$$\{\{f, g\}, H\} = -\Big(\{\underbrace{\{g, H\}}_{0}, f\} + \{\underbrace{\{H, f\}}_{0}, g\}\Big) = 0$$

Runge - Lenz - vektor

centrális potenciál $\quad V(\underline{x}) = -\dfrac{\alpha m}{|\underline{r}|}$ potenciállal (gravitáció, Coulomb)

$$\underline{L} = \underline{\dot{r}} \times \underline{N} - \alpha m \underline{e}_r$$

$$\underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{r}$$

mutassuk meg, hogy ez megmarad!

$$H = K + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha m}{r}$$

síkmozgás: $\quad N = p_\varphi$

$$\underline{\dot{r}} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi = \frac{p_r}{m}\underline{e}_r + \frac{p_\varphi}{mr^2}\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{\dot{r}} \times \underline{N} = \frac{p_r}{m}\,\underline{e}_r \times \underline{e}_z\, p_\varphi + \frac{p_\varphi^2}{mr}\,\underline{e}_\varphi \times \underline{e}_z =$$

$$\underline{e}_r \times \underline{e}_z = -\underline{e}_\varphi \qquad \underline{e}_\varphi \times \underline{e}_z = \underline{e}_r$$

$$\underline{\dot{r}} \times \underline{N} = -\frac{p_r p_\varphi}{m}\,e_\varphi + \frac{p_\varphi^2}{mr}\,\underline{e}_r$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha m}{r}$$

$$\underline{L} = \underline{\dot{r}} \times \underline{N} - \alpha m \underline{e}_r = -\frac{p_r p_\varphi}{m}\,\underline{e}_\varphi + \left(\frac{p_\varphi^2}{mr} - \alpha m\right)\underline{e}_r$$

időt explicit nem tartalmazza

$$\dot{\underline{L}} = \{\underline{L}, H\}$$

ehhez kell:

$$\{\underline{e}_\varphi, H\} = -\dot\varphi\,\underline{e}_r = -\frac{p_\varphi}{mr^2}\underline{e}_r$$

$$\{\underline{e}_r, H\} = r\dot\varphi\, e_\varphi = +\frac{p_\varphi}{mr}\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{L} = -\frac{p_r p_\varphi}{m}\underline{e}_\varphi + \left(\frac{p_\varphi^2}{mr} - \alpha m\right)\underline{e}_r$$

$$\{\underline{L}, H\} = -\frac{p_r p_\varphi}{m}\{\underline{e}_\varphi, H\} + \left(\frac{p_\varphi^2}{mr} - \alpha m\right)\{\underline{e}_r, H\}$$

$$-\cancel{4}\,e_\varphi\left\{\frac{p_r p_\varphi}{m}, H\right\} + \underline{e}_r\left\{\frac{p_\varphi^2}{mr} - \alpha m, H\right\}$$

$$\left\{\frac{p_r p_\varphi}{m}, H\right\} = -\frac{p_\varphi}{m}\overbrace{\frac{\partial H}{\partial r}}^{-\frac{p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{\alpha m}{r^2}} - \frac{p_r}{m}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial \varphi}}_{0}$$

$$\left\{\frac{p_\varphi^2}{mr}, H\right\} = -\frac{p_\varphi^2}{mr^2}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_r}}_{\dot r = \frac{p_r}{m}} - \frac{2p_\varphi}{mr^2}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial \varphi}}_{0}$$

$$\{\underline{L}, H\} = +\frac{p_r p_\varphi}{m}\frac{p_\varphi}{mr^2}\underline{e}_r + \left(\frac{p_\varphi^2}{mr} - \alpha m\right)\frac{p_\varphi}{mr}\underline{e}_\varphi$$

$$+ e_\varphi\frac{p_\varphi}{m}\left(-\frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{\alpha m}{r^2}\right) + e_r\left(-\frac{p_\varphi^2}{mr^2}\frac{p_r}{m}\right) = 0$$

Harmonikus oszcillátor megoldása kanonikus transzformációval

Emlékeztető: kanonikus transzformáció:

$$Q_i = Q_i(q,p,t) \qquad P_i = P_i(q,p,t)$$

hogy:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

de: kanonikus egyenletek

$$\delta \int \Big(\sum_i p_i\, dq_i - H\, dt \Big) = 0 \qquad \text{variációs egy.}$$

$$\delta \int \Big(\sum_i P_i\, dQ_i - H\, dt \Big) = 0$$

ezek ekvivalensek, ha

$$\sum p_i\, dq_i - H\, dt = \sum P_i\, dQ_i - H' dt + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teljes diff.}}}{dF}$$

azaz

$$dF = \sum p_i\, dq_i - \sum P_i\, dQ_i - (H' - H)\, dt$$

innen

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

ha $F = F(Q, q, t)$

(de lehet más változókkal kifejezni, Legendre-trf.

$$d\underbrace{\Big(F + \sum P_i Q_i\Big)}_{\Phi} = \sum p_i\, dq_i + \sum_i Q_i\, dP_i - (H' - H)\, dt$$

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

stb., lehet még Legendre-transzformálni

<u>Példa</u>: találjuk ki, hogy milyen kanonikus transzformációt kell alkalmazni a harmonikus oszcillátorra, hogy Q ciklikus legyen

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 x^2$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Q ciklikus $\quad \dfrac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \qquad P = -\dfrac{\partial F}{\partial Q} = \text{áll.}$

keressük

$p = f(P)\cos Q$

$x = \dfrac{f(P)}{m\omega}\sin Q$

alakban

$H = \dfrac{p^2}{2m} + m\omega^2 x^2 =$

$= \dfrac{f^2(P)}{2m}$

$P = -\dfrac{\partial F}{\partial Q}$

de mi legyen ekkor $F(q, Q)$

$$x(t) = A \cdot \sin \overbrace{(\omega t + \delta)}^{Q}$$

$$p(t) = mA\omega \cos(\omega t + \delta) = \frac{\partial F}{\partial q}$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = f(p)\cos Q$$

$$P = \text{áll.} = \frac{\partial F}{\partial Q}$$

sejtsük meg F-et: $\qquad F = \dfrac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{ctg} Q$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2}\frac{x^2}{\sin^2 Q} \qquad p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q$$

Szabadesés

$$m\ddot{y} = -mg \qquad y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$S = \int \mathcal{L}\, dt \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy$$

$$S = m\int \left(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - gy\right) dt = \frac{m}{2}\left\{ y\dot{y}\Big|_0^t - \int_0^t y\ddot{y} - 2g\int_0^t y\, dt \right\}$$

de $\ddot{y} = -g$

$$S = \frac{m}{2}\left\{ y\dot{y}\Big|_0^t - g\int_0^t y\, dt \right\}$$

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

határokkal kifejezzük

$$y(\cancel{t_0}) = y_0$$

$$y(t_1) = y_1 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_1 - y_0 + \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t$$

$$v_0 = \frac{y_1 - y_0}{t} + \frac{1}{2} g t$$

$$S = \frac{m}{2}\left\{ \frac{(y_1 - y_0)^2}{t} - g t (y_1 + y_0) - \frac{g^2}{12} t^3 \right\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m}{2}\left\{ \frac{(y_1 - y_0)^2}{t^2} + g(y_1 + y_0) + \frac{g}{4} t^2 \right\}$$

$$= -\frac{m}{2}\left\{ \frac{(y_1 - y_0)^2}{t^2} + g(y_1 - y_0) + \frac{g}{4} t^2 + 2gy_0 \right\}$$

$$= -\frac{m}{2} v_0^2 - mgy_0 = H$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = \frac{m(y_1 - y_0)}{t} \cancel{m} - \frac{1}{2} m g t = m v_0 - m g t = p$$

$$y_1 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$m(y_1 - y_0) = m v_0 t - \frac{1}{2} m g t^2$$

Hatás- és szögváltozók

$$S = \int L\, dt \qquad \text{ha} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

akkor

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

$$L = \sum p_i \dot{q}_i - H$$

$$S = \int L\, dt = \int \sum p_i \dot{q}_i - \underbrace{Ht}_{Et}$$

$$S_0 = \int \sum p_i \dot{q}_i\, dt = \int \sum p_i\, dq_i$$

egy változóban: $S_0 = S_0(q, E)$

végezzünk evvel az alkotó fv-el kanonikus transzformációt!

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq$$ legyen az új impulzus

S_0-t felírjuk q és I függvényeként

$$p = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial q} \qquad w = \frac{\partial S_0}{\partial I} \quad \text{új koordináta}$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial w} = 0 \qquad \dot{w} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dE(I)}{dI}$$

I hatásváltozó

szögváltozó

$$w = \frac{dE(I)}{dI}\, t + \text{const.}$$