Hullámegyenlet d'Alembert-féle megoldása véges intervallumon

hullámegyenlet : $\psi_{tt} = c^2 \psi_{xx}$ $\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

végtelen intervallumon ismét a d'Alembert-féle megoldás:

$$-\infty < x < \infty \qquad \psi(x,t) = \phi_1(x-ct) + \phi_2(x+ct)$$

kezdőfeltételekre való illesztés:

$$\psi(x,0) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

$$\Pi(x) = \dot{\psi}(x,0) = -c\,\phi_1'(x) + c\,\phi_2'(x)$$

ha bevezetjük $\Phi(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \Pi(x)\,dx$ -et

akkor a második egyenlet

$$\Phi'(x) = \frac{1}{c}\dot{\psi}(x) = -\phi_1'(x) + \phi_2'(x)$$

integrálva:

$$\Phi(x) = \phi_2(x) - \phi_1(x)$$

ez megoldható

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2}\left(\psi(x,0) - \Phi(x)\right)$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}\left(\psi(x,0) + \Phi(x)\right)$$

ha szeretnénk ilyen alakú megoldást bevezetni a véges húr esetén is: ki kell terjesztenünk valahogy a ϕ_1-et és a ϕ_2-t, hogy csak az intervallumon belüli értékek kellenek

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0$$

írjuk ezeket fel:

$$\phi_1(-ct) + \phi_2(ct) = 0$$

$$\phi_1(L-ct) + \phi_2(\underbrace{L+ct}) = 0$$

L-nél nagyobb érték, ezt határozzuk meg

az előbb átírjuk $\quad -\phi_1(-x) = \phi_2(x)$

$$\phi_1(\underbrace{L-ct}_{-x}) = -\phi_2(\underbrace{+L+ct}_{2L+x})$$

$$\phi_2(x+2L) = -\phi_1(-x) = \phi_2(x)$$

→ mindkét f. 2L szerint periodikus

$$\phi_2(x+2L) = \phi_2(x)$$

$$\phi_2(x) = -\phi_1(-x)$$

ezzel már kiterjeszthető.

Félvégtelen húr

csak a $\phi(0,t)=0$ feltétel van

$$\psi(0,t) = \phi_1(-ct) + \phi_2(ct) \stackrel{!}{=} 0$$

$\phi_1(-x) = \phi_2(x)$ csak ez a kiterjesztés kell.

Szabad vég L-ben

$$\partial_x \psi(L,t) = 0$$

itt az egyenlet: $\psi(L,t) = \phi_1(L-ct) + \phi_2(L+ct)$

$$\partial_x \psi(L,t) = \phi_1'(L-ct) + \phi_2'(L+ct)$$

$$\phi_1'(\underbrace{L-ct}_{-x}) = -\phi_2'(\underbrace{L-ct}_{2L+x})$$

de: a 0-beli h.f. miatt

$$\phi_1(-x) = -\phi_2(x) \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

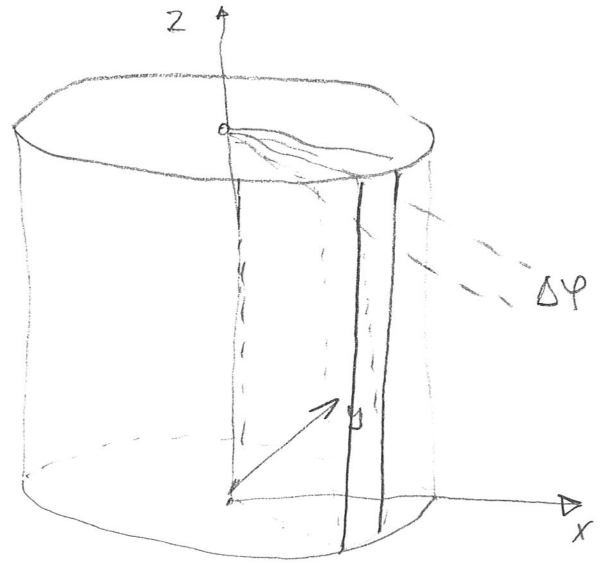
$$-\phi_1'(-x) = -\phi_2'(x)$$

$$\phi_1'(-x) = \phi_2'(2L+x)$$

$$-\phi_2'(x)$$

4L-ben lesz periodikus, 2L-ben antiperiodikus

Rúd csavarása



$z=0$ lap rögzített

$z=l$ lapot φ_l szöggel elforgatjuk

feltevés: tiszta torzió, körhenger

tiszta torzió: minden "réteg" $\varphi(z)$-vel elfordul

elmozdulásvektor: $\underline{u} = \vec{\varphi} \times \underline{r}$ $\quad \vec{\varphi} = (0, 0, \varphi(z))$

így $\underline{u}(x,y,z) = (-\varphi(z)\, y,\ \varphi(z)\, x,\ 0)$

deformációtenzor: $$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

nemnulla komponensek: $\partial_y u_x$, $\partial_z u_x$, $\partial_x u_y$, $\partial_z u_y$

így:
$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial y}}\right) = \frac{1}{2} x \varphi'(z)$$
$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial x}} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = -\frac{1}{2} y \varphi'(z)$$
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(-\varphi(z) + \varphi(z)\right) = 0$$

tehát csak a felső kettő ad járulékot!

$$\sigma_{ik} = 2\mu\, \varepsilon_{ik} + \lambda\, \delta_{ik}\, \varepsilon_{ll}$$
$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, \mathrm{Tr}\,\varepsilon \cdot \underline{\underline{1}}$$

$$\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{\ell\ell} = 0$$

marad $\quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\,\varepsilon_{yz} = \mu x \varphi'(z)$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 2\mu\,\varepsilon_{zx} = -\mu y \varphi'(z)$$

mozgásegyenletek: $\quad \rho \underline{\ddot{u}} = \underline{f} + \nabla \underline{\underline{\sigma}}$

$$\rho \ddot{u}_\ell = f_\ell + \partial_k \sigma_{k\ell}$$

egyensúly: $\quad \underline{\dot{u}} = 0 \qquad \underline{\ddot{u}} = 0$

tömegerőket elhanyagoljuk: $\quad \nabla \underline{\underline{\sigma}} = 0$

határfelületen: $\quad \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \text{felület erő} = 0$ (oldalt) a palástou

$\nabla \underline{\underline{\sigma}} = 0$ komp: $\quad \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy} + \partial_z \sigma_{xz} = 0$

$$\begin{array}{ccc} y & y & y \\ z & z & z \end{array}$$

az előből: $\quad \sigma_{xz}$ a nemnulla

$$\partial_z \sigma_{xz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi''(z) = 0$$

$$\varphi(z) = cz + d$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \qquad \varphi(\ell) = c\ell \quad \rightarrow \varphi(z) = \frac{z\,\varphi_\ell}{\ell}$$

visszahelyettesítve $\quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \dfrac{\mu \varphi_\ell x}{\ell}$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = -\frac{\mu \varphi_\ell y}{\ell}$$

Felületi erősűrűség:

$$\sigma_{\underline{n}x} = \sigma_{zx} \cos(n,z) \qquad \sigma_{\underline{n}y} = \sigma_{zy} \cdot \cos(\underline{n},z)$$

$$\sigma_{\underline{n}z} = \sigma_{zx} \cos(n,x) + \sigma_{zy} \cos(n,y) = \frac{\mu \varphi_e}{\ell} \left(x \cos(n,y) + y \cos(n,x) \right)$$

a henger palástján $\cos(n,z) = 0$

$$\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = 0$$

$$\sigma_{nz} \stackrel{?}{=} 0$$

kísita tonió: $\underbrace{x \cos(n,y)}_{\sin\varphi} - y \underbrace{\cos(n,x)}_{\cos\varphi} = 0$ pont hengerre teljesül

véglapok: $z = \ell$ $\cos(n,x) = \cos(n,y) = 0$ $\cos(n,z) = 1$

$$\sigma_{nx} = \sigma_{zx} = -\frac{\mu \varphi_e}{\ell} y \qquad \sigma_{ny} = \sigma_{zy} = \frac{\mu \varphi_e}{\ell} x$$

$$\sigma_{nz} = 0$$

erők a rádiuszvektorra merőlegesek

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2} = \frac{\mu \varphi_e r}{\ell}$$

$$dM = \sigma_n 2\pi r \, dr \cdot r = \frac{2\pi \mu \varphi_e}{\ell} r^3 dr$$

$$M = \mu \frac{\pi R^4}{2\ell} \varphi_e$$ a teljes forgatónyomaték

megfordítva

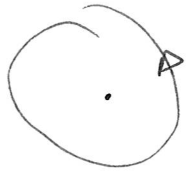
$$\varphi_\ell = \frac{1}{\mu} \frac{2}{\pi} \frac{\ell M}{R^4}$$

$$\varphi_\ell = \frac{1}{G} \frac{2\ell M}{R^4}$$ $\mu = G$ torziómodulus

$M = D\varphi_\ell$ -len $D = \frac{\mu\pi}{2}\frac{R^4}{\ell}$ direkciós nyomaték

Párhuzamos örvényfonalak mozgása

örvény:



$v = \frac{\gamma}{r}$

több örvény: egymás terében úszik

$$\gamma_i \dot{x}_i = -\sum_{j \neq i} \gamma_i \gamma_j \frac{y_i - y_j}{|r_i - r_j|^2}$$

$$\gamma_i \dot{y}_i = +\sum_{j \neq i} \gamma_i \gamma_j \frac{x_i - x_j}{|r_i - r_j|^2}$$

hogy lehet ez Hamiltoni egyenletrendszer?

tekintsük a

$$H = -\sum_{i<j} \gamma_i \gamma_j \log |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$

Hamilton-fv-t, és x_i, y_i -t konjugált változópárnak!

imp: $$\gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = +\sum_{j \neq i} \frac{\gamma_i \gamma_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \frac{x_i - x_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

koord: $$\gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\sum_{j \neq i} \frac{\gamma_i \gamma_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \frac{y_i - y_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

a szokásos Hamilton-egyenletektől csak a γ_i-kben tér el.

Megmaradó mennyiségek: eltolás

$$P_x = \sum_i \gamma_i y_i$$

$$P_y = -\sum_i \gamma_i x_i$$

$$J = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x_i^2 + y_i^2)$$

vannak nagyon érdekes megoldások: egymás körül keringő örvények

$$x_1 - x_2 = R \sin\left(\frac{\omega}{R^2}(t-t_0)\right)$$

$$y_1 - y_2 = R \cos\left(\frac{\omega}{R^2}(t-t_0)\right)$$