Mechanika gyakorlat

Lukács Árpád

2013 őszi félév

Bevezető

0.1. Kérdezzetek! Ha valami nem világos, most kérdezzetek, a ZH-n már én fogok!

0.2. Honlap: `http://www.rmki.kfki.hu/~arpi/teaching/2013elmmech`

0.3. Követelmények: Lesz két zárthelyi, a gyakorlati jegy a két zárthelyin elért jegy átlaga, ha mindkettő legalább elégséges. A félév végén egy ZH helyett lehet javítót írni. Ha valaki sok jó házi feladatot, vagy numerikus feladatmegoldást ad be, akkor lehet a zárthelyik átlagánál jobb jegyet kapni. A házi feladatok beadási határideje mindig a következő gyakorlat eleje.

1. 2013. szeptember 13.

2. 2013. szeptember 20.

Téma: még mindig matematikai alapozás.

2.1. Mátrix exponenciálisa Határozzuk meg $\mathrm{e}^{\mathbf{M}}$ az M mátix diagonalizálásával, azaz legyen $\mathbf{M} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\dagger$, ahol $\mathbf{U}$ unitér, Λ pedig diagonális (speciális eset, ha $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ ortogonális, pl. ha M valós szimmetrikus mátrix).

Megoldás: behelyettesítünk a múlt órán megismert hatványsorba:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{U\Lambda U}^\dagger\mathbf{U\Lambda U}^\dagger \cdots \mathbf{U\Lambda U}^\dagger}{n!}\,, \quad = U \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!} U^\dagger = \mathbf{U}\mathrm{e}^{\Lambda}\mathbf{U}^\dagger\,, \tag{1}$$

az egymás melletti $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = 1$-eket észrevesszük, a Λ diagonális mátrix hatványait pedig könnyű kiszámolni:

$$\mathbf{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d^n \end{pmatrix}\,, \tag{2}$$

így

$$\mathrm{e}^{\mathbf{\Lambda}} = \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_d} \end{pmatrix}\,, \tag{3}$$

azaz

$$\mathrm{e}^{\mathbf{M}} = \mathbf{U}\mathrm{e}^{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_d} \end{pmatrix}\mathbf{U}^\dagger \,. \tag{4}$$

2.2. Állandók variálása Határozzuk meg az

$$y'(x) + ay(x) = f(x) \tag{5}$$

egyenlet általános megoldását, $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás Először vizsgáljuk meg a homogén egyenlet megoldását, azaz keressünk olyan $y_1(x)$-et, amely kielégíti az

$$y'(x) + ay(x) = 0 \tag{6}$$

egyenletet. Ez egy szétválasztható változójú egyenlet, azaz $dy/y = -adx$ alakba írható, mind a két oldal primitív függvényét véve $\log y = -ax + \eta$-et kapunk (η állandó), azaz $y_1(x) = \exp(-ax)A$ egy keresett függvény (A állandó).

Keressük most az inhomogén (5) egyenlet egy (a kezdeti feltételt nem feltétlen kielégítő) megoldását az y_1 és egy ismeretlen függvény szorzataként, azaz $y(x) = \exp(-ax)\alpha(x)$ alakban (ezt hívják *az állandók variálásának*). Ezt az egyenletbe behelyettesítve kapjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \alpha'(x)\exp(-ax) + \alpha(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(-ax) = \alpha'(x)\mathrm{e}^{-ax} - a\alpha(x)\mathrm{e}^{-ax} \,, \\ y'(x) + ay(x) &= \alpha'(x)\mathrm{e}^{-ax} - a\alpha(x)\mathrm{e}^{-ax} + a\alpha(x)\mathrm{e}^{-ax} = \alpha'(x)\mathrm{e}^{-ax} \,, \end{aligned} \tag{7}$$

így

$$\alpha'(x)\mathrm{e}^{-ax} = f(x), , \tag{8}$$

ami kvadratúrával (integrálással) megoldható,

$$\alpha(x) = \int f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x \,, \tag{9}$$

és innen már nem marad más hátra, mint a kezdeti feltételekhez való illesztés, azaz keressük az inhomogén (5) egyenlet egy, az $y(x_0) = y_0$ *kezdeti feltételt is kielégítő* megoldását a homogén egyenlet megoldása és a fent megkapott partikuláris megoldás összegeként:

$$y(x) = \mathrm{e}^{-ax}A + \int_{x0}^{x} \mathrm{e}^{a(x'-x)} f(x')\mathrm{d}x' \,, \tag{10}$$

ahol az előző megoldásban az integrálás alsó határát x_0-nak választottuk. Ekkor $x = x_0$ esetén az integrál eltűnik, tehát $A = \mathrm{e}^{ax_0}y_0$, azaz a teljes megoldás

$$y(x) = \mathrm{e}^{-a(x-x_0)}y_0 + \int_{x0}^{x} \mathrm{e}^{a(x'-x)} f(x')\mathrm{d}x' \,. \tag{11}$$

Vektoriális egyenlet Legyen most $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ és $a \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vajon ekkor hogyan kapjuk meg az egyenlet megoldását? Keressünk először olyan $T(x)$ *mátrixot*, ami kielégíti az

$$T'(x) + aT(x) = 0 \tag{12}$$

homogén egyenletet. A skaláris egyenlet megoldása alapján megsejthetjük a megoldást, $U(x) = \mathrm{e}^{-ax}$-et, de könnyen megkereshetjük úgy is, ha először csak feltételezzük, hogy ugyanazzal a mátrixszal diagonalizálható, mint a, azaz ugyanazok a sajátvektorai. Legyen tehát $a = U\Lambda U^\dagger$ és $T(x) = UDU^\dagger$, ahol $D = \mathrm{diag}(\phi_1, \dots, \phi_n)$. Ekkor az egyenletben is kivihetők az U-k és $U^\dagger$-ak a végére és a főátlóban a

$$\phi'(x) + \lambda_i \phi_i = 0\,, \tag{13}$$

egyenleteket kapjuk, aminek persze már ismerjük a megoldását,

$$\phi_i(x) = \exp(-\lambda_i x)\,, \tag{14}$$

így, mivel $Ux\Lambda U^\dagger = ax$,

$$T(x) = U\exp(-\Lambda x)U^\dagger = \exp(-ax)\,. \tag{15}$$

Innen a megoldás ugyanúgy kihozható, mint a skaláris esetben.

Megjegyzés: hatványsoros módszerrel is könnyen boldogulnánk:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-ax} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n a^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n(-x)^{n-1}a^n}{n!} \\ &= -a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}a^{n-a}}{(n-1)!} = -a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x)^m a^m}{m!} = -a\mathrm{e}^{-ax}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

1. Alkalmazás: Legyen $\mathbf{O}$ időtől függő ortogonális mátrix! Ekkor $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T$ antiszimmetrikus mátrix, hiszen $\mathbf{O}\mathbf{O}^T = 1$, ezt deriválva $\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T + \mathbf{O}\dot{\mathbf{O}}^T = \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^\dagger = 0$. A forgásmátrix pedig kielégíti a

$$\dot{\mathbf{O}} = \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{\Omega}\mathbf{O} \tag{17}$$

differenciálegyenletet.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $\mathbf{\Omega}$ időben állandó (egyenletes forgás) két dimenzióban. Ekkor az antiszimmetrikus mátrix egy paraméterrel jellemezhető:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} & -\omega \\ \omega & \end{pmatrix}\,. \tag{18}$$

Az

$$\dot{\mathbf{O}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{O} \tag{19}$$

egyenlet megoldása az előbbieknek megfelelően $\mathrm{e}^{t\mathbf{\Omega}}\mathbf{O}_0$. De mi az $\mathrm{e}^{t\mathbf{\Omega}}$?

$$\mathrm{e}^{\mathbf{\Omega}} = \exp(\omega t\mathbf{I}) \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\,, \tag{20}$$

és könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{I}^2 = -1$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{t\mathbf{\Omega}} &= \sum_n \frac{(t\omega\mathbf{I})^{\mathbf{n}}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\omega\mathbf{I})^{\mathbf{2k}}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\omega\mathbf{I})^{\mathbf{2k+1}}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(t\omega)^{\mathbf{2k}}}{(2k)!} + \mathbf{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(t\omega)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(\omega t) + \mathbf{I}\sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Ez tényleg nem más, mint egy ωt szögű forgatás. Ekkor természetesen $\mathbf{O}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{\Omega}}\mathbf{O}_0$, ahol az $\mathbf{O}_0$ is csak egy kezdeti elforgatás, és ez után forgat még ωt szöggel.

2. Alkalmazás: Oldjuk meg ezzel a módszerrel az

$$\dot{\mathbf{r}} = \omega \times \mathbf{r} \tag{22}$$

egyenletet! Először is, hogy felel meg ez az előbbi feladatnak? Az $\omega\times$ operátornak is megfeleltethető egy mátrix,

$$\omega\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{23}$$

Most már értjük, nincs más hátra, mint kiszámolni $\exp(t\omega\times)$-et. Ehhez a hatványsort használjuk, és a kifejtési tételt. Vezessük be az $\mathbf{n}$ egységvektort úgy, hogy $\omega = \omega\mathbf{n}$, és vegyük észre, hogy mivel $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{v})=\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})-\mathbf{v}$, $(\mathbf{n}\times)^2=-(1-\mathbf{n}\circ\mathbf{n})$, azaz a hatványsor és a tagjai (a faktoriálisok nélkül):

$$\begin{aligned} \exp(t\omega\times) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\omega\times)^n}{n!} , \\ 1 &= (\mathbf{n}\circ\mathbf{n}) + (1-\mathbf{n}\circ\mathbf{n}) , \\ (t\omega\times) &= t\omega(\mathbf{n}\times) , \\ (t\omega\times)^2 &= -t^2\omega^2(1-\mathbf{n}\circ\mathbf{n}) , \\ (t\omega\times)^3 &= -t^3\omega^3(\mathbf{n}\times) , \end{aligned} \tag{24}$$

és innen ismétlődik, az $(1-\mathbf{n}\circ\mathbf{n})$-es taggal, csak az együttható lesz $t^5\omega^5$. Gyűjtsük össze az egyes tagok együtthatóit! $(\mathbf{n}\circ\mathbf{n})$-é a legegyszerűbb, 1, majd $(\mathbf{n}\times)$-é:

$$t\omega - \frac{t^3\omega^3}{3!} + \frac{t^5\omega^5}{5!} + \dots = \sin(\omega t) , \tag{25}$$

és $(1-\mathbf{n}\circ\mathbf{n})$-é:

$$1 - \frac{t^2\omega^2}{2} + \frac{t^4\omega^4}{4!} + \dots = \cos(\omega t) , \tag{26}$$

ahonnan most már könnyedén:

$$\exp(t\omega\times) = \mathbf{n}\circ\mathbf{n} + \cos(\omega t)(1-\mathbf{n}\circ\mathbf{n}) + \sin(\omega t)(\mathbf{n}\times) . \tag{27}$$

Mit csinál ez az operátor? $\mathbf{n}$ körül ω szögsebességgel forgat. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha olyan koordinátarendszert választunk, hogy $\mathbf{n}=\mathbf{e}_3$. A megoldás pedig: ha $\dot{\mathbf{r}}=\omega\times\mathbf{r}$, akkor $\mathbf{r}(t)= =\exp((t-t_0)\omega\times)\mathbf{r}_0$, ahol a kezdőfeltétel $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$, és a helyvektor természetesen ω szögsebességgel forog a tengely körül,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}_0) + \cos(\omega t)(\mathbf{r}-\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}_0)) + \sin(\omega t)(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_0) . \tag{28}$$

2.3. Másodrendű egyenlet Oldjuk meg az előbbihez hasonlóan a

$$y''(x) + A^2 y(x) = 0 \tag{29}$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet!

Megoldás: Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenlet megoldása

$$y(x) = \cos(Ax)y_1 + \sin(Ax)y_2 , \tag{30}$$

ugyanis

$$\begin{aligned} \cos(Ax) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Ax)^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\cos(Ax)}{\mathrm{d}x} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2kx^{2k-1}AA^{2k-1}}{(2k)(2k-1)!} \\ &= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -A\sin(Ax) , \end{aligned} \tag{31}$$

a $\sin(Ax)$-re teljesen hasonlóan látjuk, hogy $\mathrm{d}\sin(Ax)/\mathrm{d}x = A\cos(Ax)$.

Illeszünk a kezdeti feltételhez! Legyen $x=0$-ban $y(0)=y_0, y'(0)=v_0$. Deriváljuk a (30) értéke $x=0$-ban $y_0(x)=y_1$ és deriváltja: $y'(x)=-A\sin(Ax)y_1+A\cos(Ax)y_2$. így $y'(0)=Ay_2$, tehát $y_1=y_0$ és $y_2=A^{-1}v_0$, a teljes megoldás pedig

$$y(x)=\cos(Ax)y_0+\sin(Ax)A^{-1}v_0\,. \tag{32}$$

2.4. Neminerciális koordinátarendszerek Írjuk fel a mozgásegyenletet egy általános neminerciális (derékszögű) koordinátarendszerben!

Megoldás: A legáltalánosabb kapcsolat a két derékszögű koordinátarendszer között a következő lehet:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{O}(t)\mathbf{r}'(t)+\mathbf{R}(t)\,, \tag{33}$$

ahol $\mathbf{O}(t)$ egy általános (az időtől függő) ortogonális mátrix, $\mathbf{R}(t)$ pedig a vesszős koordinátarendszer kezdőpontjának a helye. Ekkor:

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\dot{\mathbf{O}}(t)\mathbf{r}'(t)+\mathbf{O}(t)\dot{\mathbf{r}}'(t)+\dot{\mathbf{R}}(t)\,, \tag{34}$$

és így

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)=\ddot{\mathbf{O}}(t)\mathbf{r}'(t)+2\dot{\mathbf{O}}(t)\dot{\mathbf{r}}'(t)+\mathbf{O}(t)\ddot{\mathbf{r}}'(t)+\ddot{\mathbf{R}}(t)\,, \tag{35}$$

és a mozgásegyenlet az eredeti koordinátarendszerben

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{F}, \tag{36}$$

ebbe szeretnénk behelyettesíteni. Helyettesítsük be ide (35)-öt, szorozzuk meg $\mathbf{O}^T$-tal, és vigyünk át néhány tagot a jobboldalra:

$$m\ddot{\mathbf{r}}'=\mathbf{F}'-m\mathbf{O}^T\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r}'-2m\mathbf{O}^T\dot{\mathbf{O}}\dot{\mathbf{r}}'-m\mathbf{O}^T\ddot{\mathbf{R}}\,, \tag{37}$$

ahol $\mathbf{F}'=\mathbf{O^T}\mathbf{F}$. Legyen $\mathbf{g}=-\mathbf{O}^T\ddot{\mathbf{R}}$.

Egy kis mátrixalgebra:

$$\begin{aligned}\mathbf{O}^T\mathbf{O}&=1\,,\\ \dot{\mathbf{O}}^T\mathbf{O}+\mathbf{O}^T\dot{\mathbf{O}}&=0\,,\end{aligned} \tag{38}$$

azaz az előző (37)-es egyenletben szereplő $\dot{\mathbf{O}}^T\mathbf{O}$ mátrix antiszimmetrikus, megfelel neki egy $\omega\times$. Ez a szögsebességvektor. Ekkor

$$\begin{aligned}\omega\times&=\mathbf{O}^T\dot{\mathbf{O}}\,,\\ \dot{\omega}\times&=\mathbf{O}^T\ddot{\mathbf{O}}+\dot{\mathbf{O}}^T\dot{\mathbf{O}}\,,\end{aligned} \tag{39}$$

a második tagba $1=\mathbf{O}\mathbf{O}^T$-tat beszúrva, $\dot{\mathbf{O}}^T\dot{\mathbf{O}}=\dot{\mathbf{O}}^T\mathbf{O}\mathbf{O}^T\dot{\mathbf{O}}=(\omega\times)^T(\omega\times)=-(\omega\times)(\omega\times)$. Így a teljes egyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}}'=\mathbf{F}'+m\mathbf{g}-2m\omega\times\dot{\mathbf{r}}'-m\dot{\omega}\times\mathbf{r}'-m\omega\times(\omega\times\mathbf{r}')\,. \tag{40}$$

A második tag a gyorsulás miatt fellépő inerciaerő, a harmadik a Coriolis-erő az utolsó pedig a centrifugális erő.

2.5. Vízfelszín forgó edényben Határozzuk meg egy ω szögsebességgel forgó edényben a vízfelszín alakját!

Megoldás: a keresett alak nyilván forgásfelület. Vizsgáljuk a problémát forgó vonatkoztatási rendszerben. Tekintsük az edény keresztmetszetét, x legyen ezen a vízszintes, y a függőleges koordináta. Az inerciaerő x komponense $mx\omega^2$, y irányban pedig hat a gravitáció, $-mg$. A felületnek a két erő eredőjére kell merőlegesnek lennie, azaz adott x pontban a felület érintővektora $(x\omega^2,g)$-vel párhuzamos, azaz az $y(x)$ függvény kielégíti az $y'=x\omega^2/g$ egyenletet, aminek a megoldása $y(x)=y_0+\omega^2x^2/2g$, az y_0 integrálási állandó jelentése: a felület magassága a forgástengelyen.

2.6. A Foucault-inga mozgása Írjuk le egy, a forgó Földön rögzített inga (a Foucault-inga) mozgását, a Föld szögsebességében első rendben!

Megoldás: Az inga mozgásegyenletének felírásához válasszunk olyan koordinátarendszert, melynek az x tengelye Keletre, y tengelye Északra és a z tengelye felfelé mutat. Használjuk a mozgó koordinátarendszerben érvényes (40) mozgásegyenletet. A koordinátarendszer szögsebességvektora:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y, \omega_z \end{pmatrix}, \quad \omega_y = \omega \cos\psi\,, \quad \omega_z = \omega \sin\psi\,, \tag{41}$$

ahol $\omega = 2\pi/24/60/60$, ψ a földrajzi szélesség. A mozgásegyenletben elhanyagolva az ω^2-es tagokat:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + m\mathbf{g} - 2m\omega \times \dot{\mathbf{r}}\,, \tag{42}$$

ahol $\mathbf{g} = (0{,}0, -g)$ a nehézségi gyorsulás. A kényszererő olyan, hogy az ingát rajta tartja a felfüggesztési pont körüli, ℓ sugarú gömbfelületen. Kis kitérésekre: $K_x = -m\omega_0^2 x$, $K_y = -m\omega_0^2 y$, $K_z = mg$, $\omega_0^2 = \sqrt{g/\ell}$. A z-komponens ebben a közelítésben triviális. Ezekkel a közelítésekkel a mozgásegyenlet komponensei:

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + 2\omega_z \dot{y}\,, m\ddot{y} \quad = -m\omega_0^2 y - 2\omega_z \dot{x}\,. \tag{43}$$

Megoldás komplex számokkal: legyen tehát $\xi = x + iy$. Ezzel

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi - 2i\omega_z \dot{\xi}\,. \tag{44}$$

Ez az egyenlet egy lineáris állandó együtthatós homogén egyenlet, keressük tehát a megoldást $\xi{=}\xi_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$ alakban (próbafüggvény-módszer)! Ezt behelyettesítve (és a közös faktorokkal elosztva, valamint egy oldalra rendezve):

$$\lambda^2 + \omega_0^2 + 2i\omega_z \lambda = 0\,, \tag{45}$$

ami egy másodfokú egyenlet, megoldásai:

$$\lambda_{1,2} = i\omega_z \pm \sqrt{-\omega_z^2 - \omega_0^2} = i\left(\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2}\right)\,, \tag{46}$$

Az általános megoldás tehát

$$\xi(t) = \xi_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \xi_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{i\omega_z t}\left(\xi_1 \mathrm{e}^{it\sqrt{\omega_z^2+\omega_0^2}} + \xi_2 \mathrm{e}^{-it\sqrt{\omega_z^2+\omega_0^2}}\right) \approx \mathrm{e}^{i\omega_z t}\left(\xi_1 \mathrm{e}^{i\omega_0 t} + \xi_2 \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\right)\,. \tag{47}$$

Az $y_{1,2}$ állandókat a kezdőfeltételhez (valamilyen t_0 pillanatban adott pozíció és sebesség) való illesztés során kell meghatározni. Ha a gyors ingalengések $T_0 = 2\pi/\omega_0$ periódusának minfig azonos pontján (pl. a legnagyobb kitéréskor) nézünk rá az ingára, akkor látjuk, hogy a fázis $\exp(i\omega_z t)$-sen változik: az z tengely körül az inga lengési síkja ω_z szögsebességgel forog.