Green-fv és az állandók variálása

Tekintsünk egy másodrendű lineáris diffegyenletet:

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = f(x)$$

$f(x)$: inhomogenitás (v. forrás)

Tfh. ismerjük a homogén egyenlet két lin. ftlen megoldását:

$$y_i'' + p y_i' + q y_i = 0 \qquad i = 1,2$$

az inhomogén egyenlet megoldását keressük

$$y(x) = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x)$$

alakban. 2 fv van, egy $y(x)$ fvt keresünk, még egy egyenlet feltehető:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$

deriválunk:

$$y'(x) = v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) \qquad \text{ezek } 0$$

$$+ v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x)$$

$$y''(x) = v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x)$$

$$+ v_1(x)\,y_1''(x) + v_2(x)\,y_2''(x)$$

egyenletbe behely: $v_i(y_i'' + p y_i' + q y) = 0$ marad

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f \quad \text{és a feltevés} \quad v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$

Oldjuk ezt meg v_i'-re!

A $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$ egyenletből

$$v_1' = -\frac{v_2' y_2}{y_1}$$

ezt az elsőbe beírva

$$-\frac{v_2' y_2 y_1'}{y_1} + v_2' y_2' = f$$

$$v_2' = \frac{f}{y_2' - \frac{y_2 y_1'}{y_1}} = \frac{f y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

Legyen $W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$

Ezzel

$$v_2'(x) = \frac{f(x)\, y_1(x)}{W(x)}$$

teljesen hasonlóan

$$v_1'(x) = -\frac{f(x)\, y_2(x)}{W(x)}$$

$$y(x) = y_2(x) \int_a^x \frac{f(x')\, y_1(x')}{W(x')}\, dx' - y_1(x) \int_b^x \frac{f(x')\, y_2(x')}{W(x')}\, dx'$$

a,b meghatározása: homogén egyenlet megoldását adja hozzá → illesztés kezdeti- vagy peremfeltételekhez.

Válasszunk egy partikuláris megoldást, legyen

pl. $a=b$

$$y(x) = \int_a^x \underbrace{\frac{y_2(x)\,y_1(x') - y_1(x)\,y_2(x')}{W(x')}}_{G(x,x')} dx'$$

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{y_2(x)\,y_1(x') - y_1(x)\,y_2(x')}{W(x')} & x > x' \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

így $$y(x) = \int_a^{\infty} G(x,x')\,f(x')\,dx'$$

Példa: harmonikus oszcillátor

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \qquad f = \frac{F}{m}$$

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$$

$$W(t) = x_1(t)\,\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\,x_2(t) = \omega_0$$

$$G(t,t') = \Theta(t-t')\frac{1}{\omega_0}\left(\sin(\omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t') - \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t')\right)$$

$$= \frac{\Theta(t-t')}{\omega_0}\sin\left[\omega_0(t-t')\right]$$

<u>Megjegyzés</u> : milyen egyenletet elégít ki a

Green - fv :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,x') f(x')\,dx'$$

legyen $f(x') = \delta(x' - x_0')$

ekkor $y(x) = G(x, x_0)$

$$G''(x,x_0) + p(x)\,G'(x,x_0) + q(x)\,G(x,x_0) = \delta(x-x_0)$$

$' = \frac{d}{dx}$

A csillapított oszcillátor Green-fv

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

legyen $\omega_0 > \alpha$ $\qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cdot\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

megoldja az egyenletet. Kezdeti feltételek illesztése:

$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$ eset

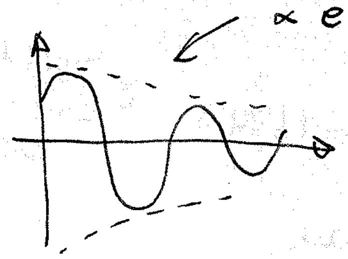
$$x(0) = A \overset{!}{=} x_0$$

$$\dot{x}(0) = -\alpha A + (-A\omega\underbrace{\sin(\omega\cdot 0)}_{0}) + B\omega\underbrace{\cos(\omega\cdot 0)}_{1})$$

$$= -\alpha A + \omega B$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega}$$

hogy néz ki ez a fv?



Aperiodikus határeset

$\alpha \to \omega_0 \qquad \omega \to 0$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(\cancel{A}\cdot x_0\cdot\cos(\omega t) + \frac{v_0+\alpha x_0}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(x_0 + t(v_0 + \alpha x_0)\right)$$

mert $\displaystyle\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \overset{\text{l'Hospital } \frac{d}{d\omega}}{=} \lim_{\omega\to 0}\frac{t\cos(\omega t)}{1} = t$

erős csillapítás: $\alpha > \omega_0$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(x_0 \, ch(\beta t) + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\beta} sh(\beta t)\right)$$

$\omega = i\beta$

$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

Green-fv számítása

$y_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$

$y_2(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$

gyenge csillapítás esete

$$y_1(t')y_2(t) - y_1(t)y_2(t') = e^{-\alpha(t+t')}\sin(\omega(t-t'))$$

$$W(t) = y_1(t')y_2'(t') - y_1'(t')y_2(t) = e^{-\alpha t}\{\cos(\omega t')\, e^{-\alpha t}(-\alpha\sin(\omega t') + \omega\cos(\omega t'))$$

$$+ - e^{-\alpha t'}(-\alpha\cos\omega t' - \omega\sin\omega t')\, e^{-\alpha t'}\sin\omega t$$

$$= e^{-2\alpha t'}\omega$$

$$G(t,t') = \Theta(t-t')\frac{e^{-\alpha(t-t')}}{\omega}\sin(\omega(t-t'))$$

teljesen hasonlóan:

anharm. h. e. $\quad G(t,t') = \Theta(t-t')\, t\, e^{-\alpha t}$

erősen csillapított: $\quad G(t,t') = \frac{\Theta(t-t')}{\beta} sh(\beta t)$

Alkalmazás: lépcsősfv-gerjesztés

legyen $f(t) = \begin{cases} f_0 & 0<t<T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ $\qquad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$t<0$-ra $f(t)=0$ $\qquad x(t<0)=0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Theta(t-t')}{\omega} e^{-\alpha(t-t')} \sin(\omega(t-t')) f(t')\,dt'$$

$-\infty$ ← elég 0-tól: $t'<0$-ra $f(t')=0$

(felső határ: $\min(t,T)$)

legyen először $t<T$

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\alpha(t-t')} \sin(\omega(t-t')) f_0\, dt'$$

$$\sin(\omega(t-t')) = \frac{e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}}{2i}$$

$$\int_0^t \frac{e^{(i\omega-\alpha)(t-t')}}{2i} dt' = \frac{1}{2i}\left[+ \frac{e^{(i\omega-\alpha)(t-t')}}{-i\omega+\alpha} \right]_{t'=0}^{t'=t}$$

$(\alpha - i\omega)(t'-t)$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{i\omega-\alpha} + \frac{e^{(i\omega-\alpha)t}}{i\omega-\alpha} \right)$$

hasonlóan

$$\int_0^t \frac{e^{(-i\omega-\alpha)(t-t')}}{2i} dt' = \frac{1}{2i}\left[- \frac{e^{(-i\omega-\alpha)(t-t')}}{-i\omega-\alpha} \right]_{t'=0}^{t'=t}$$

a másik $(\alpha+i\omega)(t'-t)$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-i\omega-\alpha} - \frac{e^{(-i\omega-\alpha)t}}{-i\omega-\alpha} \right]$$

összevonva

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega} \frac{1}{2i} \left[\frac{1 - e^{(i\omega-\alpha)t}}{-i\omega+\alpha} - \frac{1-e^{(-i\omega-\alpha)t}}{+i\omega+\alpha} \right]$$

azonos nevezőre hozzuk

$$(i\omega-\alpha)(-i\omega-\alpha) = \alpha^2-(i\omega)^2 = \alpha^2+\omega^2 = \omega_0^2$$

$$x(t) = \frac{f_0}{2i\omega_0^2\omega} \Big[\underbrace{-i\omega-\alpha-i\omega+\alpha}_{-2i\omega} + (i\omega-\alpha)e^{(-i\omega-\alpha)t}$$

$$-(-i\omega-\alpha)e^{(i\omega-\alpha)t} \Big]$$

$$= \frac{f_0}{\omega_0^2}\left[+1 + e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right]$$

$t > T$: $\int_0^T$ integrál van

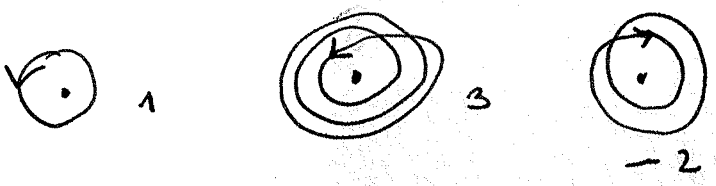
$x(t) = \ldots$ HF kiszámolni

$$x(t) = \frac{f_0}{2i\omega}\left[\frac{e^{(i\omega-\alpha)(t-T)} - e^{(i\omega-\alpha)t}}{\alpha-i\omega} - \frac{e^{(-i\omega-\alpha)(t-T)} - e^{(-i\omega-\alpha)t}}{\alpha+i\omega}\right]$$

$t \to +\infty$ mindenki $e^{-\alpha t}$-sen lecseng $x(t) \to 0$

Emlékeztető: reziduum-tétel, komplex kontúrintegrál

Körüljárási szám



stb.

Reziduum

egysz. pólus $\quad \mathrm{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

magasabbrendű

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big((z - z_0)^n f(z) \Big)$$

Reziduum-tétel:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_i)\, w_i$$

z_i pólus γ belsejében

$\uparrow$ körüljárási szám

Alkalmazás: csillapított oszcillátor Green-fv-e

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f$$

Green-fv: δ

Fourier-trf:

$$-\omega^2 \tilde{g}(\omega) + 2i\omega\alpha \tilde{g}(\omega) + \omega_0^2 \tilde{g}(\omega) = 1$$

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\omega\alpha - \omega^2}$$

így

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\omega\alpha - \omega^2} e^{+i\omega t}\, d\omega$$

hogyan számoljuk ki ezt az integrált?

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2$$

$$i\omega = i\omega_1 - \omega_2$$

nagy pozitív ω_2-re $\quad e^{i\omega t} = e^{i\omega_1 t} e^{-\omega_2 t}$

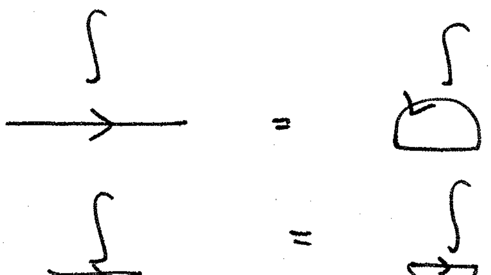
negatív

lecseng $t > 0$ esetén

$t < 0$

$t > 0$ $\quad \int$ = $\int$ $\quad w = 1$

$t < 0$ $\quad \int$ = $\int$ $\quad w = -1$



Pólusok:

$$\frac{1}{\omega_0^2+2i\omega\alpha-\omega^2} = \frac{1}{\omega-\omega_1}\,\frac{1}{\omega-\omega_2}$$

hol 0 a nevező

$$\omega^2-2i\omega\alpha-\omega_0^2=0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{2i\alpha \pm \sqrt{-4\alpha^2+4\omega_0^2}}{2} = i\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

a komplex része mind a kettőnek pozitív, az alsó félsíkon nincs pólus

$$G(t) = 0 \qquad t<0\text{-ra}$$

$t>0$

$$\underset{t>0}{G(t)} = -\frac{1}{2\pi}\int \underbrace{\frac{1}{\omega-\omega_1}\,\frac{1}{\omega-\omega_2}\,e^{i\omega t}}_{f(\omega)}\,d\omega$$

reziduumok:

$$\mathrm{Res}(f(\omega),\omega_1) = \lim_{\omega\to\omega_1}(\omega-\omega_1)\frac{1}{\omega-\omega_1}\,\frac{1}{\omega-\omega_2}\,e^{i\omega t}$$

$$= \frac{1}{\omega_1-\omega_2}\,e^{i\omega_1 t}$$

$$\mathrm{Res}(f(\omega),\omega_2) = -\frac{1}{\omega_1-\omega_2}\,e^{i\omega_2 t}$$

$$G(t) = \underbrace{-2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi}}_{i}\;\frac{1}{\omega_1-\omega_2}\left(e^{i\omega_1 t}-e^{i\omega_2 t}\right)$$

$$e^{i\omega_1 t} = e^{i(i\alpha + \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2})\,t}$$

$$= e^{-\alpha t} \; e^{i\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,t}$$

$$e^{i\omega_2 t} = e^{i(i\alpha - \sqrt{\omega_0^2-\alpha^2})t} = e^{-\alpha t} \; e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,t}$$

$$e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t} = 2i\, e^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\; t\right)$$

$$G(t) = \begin{cases} -\dfrac{i}{\omega_1-\omega_2} \; 2i\, e^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\, t\right) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}} \; e^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\; t\right)$$

visszakaptuk a csillapított oscillátor Green-fvét

Az inga rezgései

$$L = K - V \qquad K = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 \qquad V = -mg\ell\cos\varphi$$

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} + \dots$$

mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi \approx -\frac{g}{\ell}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots\right)$$

$$\approx -\omega_0^2\varphi - \varepsilon\varphi^3$$

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0^2}{6} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

Oldjuk meg a

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\varepsilon\varphi^3$$

mozgásegyenletet ε-ban sorfejtéssel

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \dots$$

az egyenletet ε hatványai szerint rendezve

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 = -\varphi_0^3$$

$$\varphi_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi_0^3 = A^3\cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{A^3}{8}\cos(\overbrace{\cancel{3\alpha}}^{3(\omega t + \varphi)}) + \frac{3A^3}{8}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos^3(\alpha) = \frac{1}{8}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} + e^{-3i\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3}{4}\cos\alpha$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = -\frac{A^3}{4}\cos(3(\omega_0 t+\varphi)) - \frac{3A^3}{4}\cos(\omega_0 t+\varphi).$$

ez rezonánsan gerjesztett oszcillátor

$$\varphi_1(t) = \frac{A^3}{32\omega_0^2}\cos(3(\omega_0 t+\varphi)) - \frac{3A^3}{8\omega_0^2}\, t\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

miért rossz ez? $\frac{3\varepsilon A^3 t}{8\omega_0^2} = O(1)\cdot A$ -nál

elromlik

csak rövid ideig érvényes

Volt periódusidő - perturbációszámítás

$\rightarrow$ tudjuk, hogy nem $\frac{2\pi}{\omega_0}$ a periódus!

Legyen $\varphi_0(t) = A\cos(\omega t)$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

$$\dot{\varphi}_0 = -\omega A\sin(\omega t) = -\omega_0 A\sin(\omega t) - \varepsilon\omega_1 A\sin(\omega t) + \dots$$

$$\ddot{\varphi}_0 = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega t) - 2A\varepsilon\omega_0\omega_1\cos(\omega t) + \dots$$

az egyenletet ismét rendezzük ε hatványai szerint $\ddot{\varphi}_0 = -\omega_0^2 \varphi_0 + \underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)}_{-2\varepsilon\omega_0\omega_1+\dots} \varphi_0$

$$-2\varepsilon\omega_0\omega_1\varphi_0 + \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 = -\varepsilon\varphi_0^3$$

átrendezve az ε-ban lineáris részt:

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 = \left(2A\omega_0\omega_1 - \frac{3A^3}{4}\right)\cos(\omega t) - \frac{A^3}{4}\cos(3\omega t)$$

nincs rezonancia, ha $\omega_1 = \dfrac{3A^2}{8\omega_0}$

$$\varphi_0(t) = A\cdot\cos(\omega t)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{A^3}{32\omega_0^2}\cos(3\omega t)$$

inga: $\varepsilon = -\dfrac{\omega_0^2}{6}$

$$\omega \approx \omega_0 + \varepsilon\omega_1 = \omega_0 - 4\frac{\omega_0^2}{24}\frac{3A^2}{8\omega_0} = \omega_0 - \frac{A^2}{16}\omega_0 + \dots$$

$$\varphi(t) = A\cdot\cos(\omega t) + \frac{A^3}{192}\cos(3\omega t)$$

$t=0$: max kitérés $A + \dfrac{A^3}{192}$

ábra:

$g = 9{,}81$

$l = 1$

$v_0 = 0,\ 0.6,\ 1.2,\ 1.8,\ 2.4,\ 3$ m/s

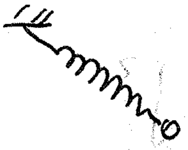
$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\ K(k) \qquad k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{A^2}{16}+\dots\right)$$ egyesik

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1-\frac{A^2}{16}+\dots\right)$$

Csillapitott rugós inga



rugó belső csillapitása γ_1

tömegpont viskózus folyadékban : γ_2

($-\gamma_1 v$ és $-\gamma_2 v$ erők)

$$L = K - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgr\cos\varphi - \frac{k}{2}(r-r_0)^2$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi - \frac{k}{2}(r-r_0)^2$$

dissipációs fv :

$$R = \gamma_1 \dot{r}^2 + \gamma_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

mozgásegyenletek :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + k(r-r_0) = -2(\gamma_1+\gamma_2)\dot{r}$$

$$mr^2\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = -2\gamma_2 r^2\dot{\varphi}$$

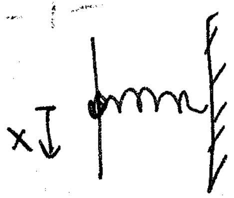
$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j \underset{\uparrow}{=} -\frac{\partial L}{\partial t} - 2R$$

tisztán kvadr R

itt :

$$\frac{dE}{dt} = -2R = -2[\gamma_1\dot{r}^2 + \gamma_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)]$$

Sínen ~~súrlódó~~ golyó csill. rugóval



$$L = K - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{h^2+x^2} - \ell\right)^2$$

$$R = \gamma\left(\frac{d}{dt}\,\text{rugóhossz}\right)^2 = \gamma\left[\frac{d}{dt}\sqrt{h^2+x^2}\right]^2$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{h^2+x(t)^2} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{h^2+x^2(t)}}\,\cancel{2}x\dot{x}$$

$$R = \gamma\left(\frac{d}{dt}\,\cdots\right)^2 = \gamma\,\frac{x^2\dot{x}^2}{h^2+x^2}$$

mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x} = k\left(\sqrt{h^2+x^2} - \ell\right)\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = k\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{h^2+x^2}}\right)x$$

$$-\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = \frac{-2\gamma x^2\dot{x}}{h^2+x^2} = -2\gamma\dot{x}\left(\frac{\overset{(h^2+x^2)-\cancel{h^2}}{x^2}}{h^2+x^2}\right) = -2\gamma\dot{x}\left(1 - \frac{h^2}{h^2+x^2}\right)$$

$$m\ddot{x} + kx\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{h^2+x^2}}\right) = -2\gamma\left(1 - \frac{h^2}{h^2+x^2}\right)\dot{x}$$

a.) eset: $h > l$

a rugó előfeszített

$$\frac{l}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{l}{h\sqrt{1+x^2/h^2}} \approx \frac{l}{h}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{2h^2}} \approx \frac{l}{h}\left(1-\frac{x^2}{2h^2}\right)$$

$$m\ddot{x} + kx\left(1-\frac{l}{h}+\frac{lx^2}{2h^3}\right) =$$

$$= -2\gamma\left(\frac{x^2\dot{x}}{h^2}\right)$$

"köbös" csillapítás!

$$\frac{h^2}{h^2+x^2} = \frac{1}{1+x^2/h^2} \approx 1-\frac{x^2}{h^2}$$

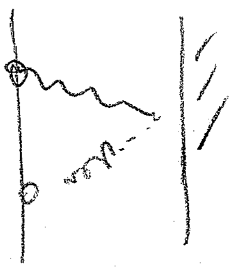
b.) eset $h = l$

$$\frac{l}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{l}{l\sqrt{1+x^2/l^2}} \approx \frac{1}{1+x^2/2l^2} \approx 1-\frac{x^2}{2l^2}$$

$$m\ddot{x} + \frac{kx^3}{2l^2} = -2\gamma\frac{x^2\dot{x}}{h^2}$$

a visszatérítő erő is köbös

c.) eset



2 egyensúlyi helyzet

stabil $x \neq 0$

$x = 0$ instabil

— [illegible] —

[illegible]

[illegible]