Síelő

$y = f(x)$ kényszer hatása alatt mozgó tömegpont

Megoldás

a.) ha a kényszererő nagysága nem érdekes

$$y = f(x)$$

$$\dot{y} = f'(x)\,\dot{x}$$

$$L = K - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$= \frac{1}{2} m (1 + f'(x)^2)\,\dot{x}^2 - mg f(x)$$

mozgásegyenletek: csak x-re kell (y-t kifejeztük)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + f'^2)\,\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + f'^2)\,\ddot{x} + 2m f' f'' \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m f' f'' \dot{x}^2 - mg f'$$

~~[illegible]~~ E-L:

$$\rightarrow \quad m(1 + f'^2)\,\ddot{x} + m f' f'' \dot{x}^2 + mg f' = 0$$

b.) ha a kényszererő nagysága is lényeges:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y - f(x))$$

Lagrange-multiplikátor.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\lambda f'(x) \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg + \lambda$$

$$m\ddot{x} = -\lambda f'$$

$$m\ddot{y} = \lambda - mg$$

és

$$y = f(x)$$

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x}$$

$$\ddot{y} = f'(x)\ddot{x} + f''(x)\dot{x}^2$$

$$mf'\ddot{x} + mf''\dot{x}^2 = \lambda - mg$$

$$m\ddot{x} = -\lambda f'$$

$$-(1 + f'^2)\lambda = -mg - mf''\dot{x}^2$$

$$\lambda = \frac{mg + mf''\dot{x}^2}{1 + f'^2}$$

a hellyel paraméterezve:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

$$= \frac{1}{2} m (1 + f'^2)\, \dot{x}^2 + mg\, f(x)$$

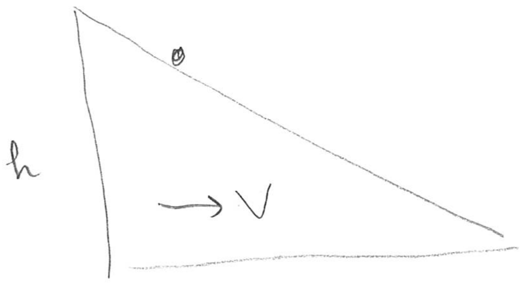
$$\dot{x}^2 = 2 \frac{\frac{E}{m} - g f(x)}{1 + f'^2}$$

ez behelyettesíthető

$$\lambda = \frac{mg + 2m f'' \frac{\frac{E}{m} - fg}{1 + f'^2}}{f'^2 + 1} \qquad \frac{E}{mg} =: h_0$$

$$\lambda = \frac{m}{1 + f'^2} \left(g + f'' \frac{2g(h_0 - f(x))}{1 + f'^2} \right)$$

Kényszer teljesítménye mozgó lejtőn



V sebességgel mozgó lejtő

$$y = h - \alpha(x - Vt)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$+ \lambda(y - h + \alpha(x - Vt))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

stb.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda - mg$$

és

$$y = h - \alpha(x - Vt)$$

$$m\ddot{x} = \lambda\alpha$$

$$m\ddot{y} = \lambda - mg$$

$$y = h - \alpha x + \alpha V t$$

$$\dot{y} = -\alpha\dot{x} + \alpha V$$

$$\ddot{y} = -\alpha\ddot{x}$$

$$m\ddot{y} = -m\alpha\ddot{x} = -\lambda\alpha^2$$

$$= \lambda - mg$$

$$\lambda(1 + \alpha^2) = mg$$

$$\lambda = \frac{mg}{1 + \alpha^2}$$

$$m\ddot{x} = \frac{mg\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{mg\alpha}{1+\alpha^2} t^2$$

$$y = h - \alpha(x - Vt)$$

$$= h - \alpha x_0 - \alpha v_0 t - \frac{1}{2}\frac{mg\alpha^2}{1+\alpha^2} t^2 + \alpha V t$$

$$\dot{x} = v_0 + \frac{mg\alpha}{1+\alpha^2} t$$

$$\dot{y} = -\alpha v_0 - \frac{mg\alpha^2}{1+\alpha^2} t + \alpha V$$

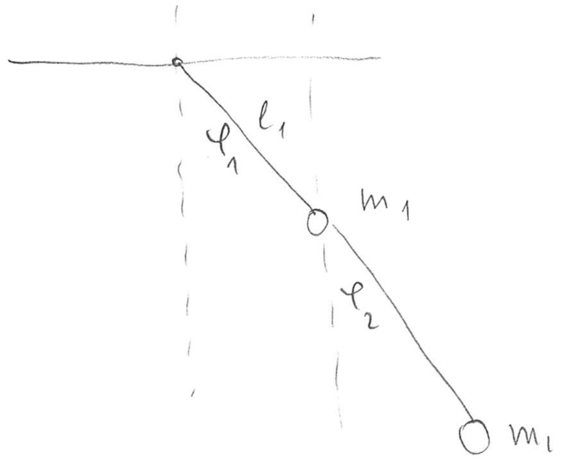
kényszererő:

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mg\alpha}{1+\alpha^2} \\ \frac{mg}{1+\alpha^2} \end{pmatrix}$$

$$P = \underline{K}\,\underline{v} = \frac{mg}{1+\alpha^2}\Big(\underbrace{\alpha v_0 + \frac{mg\alpha^2}{1+\alpha^2} t}_{K_x v_x} \underbrace{- \alpha v_0 - \frac{mg\alpha^2}{1+\alpha^2} t + \alpha V}\Big)$$

$$= \frac{mg\alpha V}{1+\alpha^2} \neq 0$$

Kettős inga alsó szárában ébredő erő



$$x_1 = l \sin \varphi_1$$

$$y_1 = l \cos \varphi_1$$

kényszer

$$\Phi(x_2, y_2, x_1, y_1) = \frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2\right]$$

[kötél hossza l_2]

a mozgásegyenleteket már ismerjük, most a kényszert szeretnénk meghatározni →

$$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$+ mg l_1 \cos\varphi \quad + mg y_2 \quad + \lambda \Phi$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \lambda (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = + mg + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = + mg + \lambda (y_2 - y_1)$$

kényszererő: $\underline{K} = \lambda \begin{pmatrix} \partial\Phi / \partial x_2 \\ \partial \Phi / \partial y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$

λ-t kell egyszerű alakban kifejezni

x_2, y_2, φ -vel

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 - \ell^2 \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$0 = \dot{\Phi} = (x_2-x_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + (y_2-y_1)(\dot{y}_2-\dot{y}_1)$$

ahonnan:
$$\dot{y}_2-\dot{y}_1 = -\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(\dot{x}_2-\dot{x}_1) = -\operatorname{tg}\varphi_2\,(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$$

$$0 = \ddot{\Phi} = (\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2-\dot{y}_1)^2 + (x_2-x_1)(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1) + (y_2-y_1)(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)$$

$$= (\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi_2) + (x_2-x_1)\left[\frac{\lambda}{m}(x_2-x_1) - \ddot{x}_1\right]$$
$$+ (y_2-y_1)\left[g + \frac{\lambda}{m}(y-y_1) - \ddot{y}_1\right]$$

$$= \frac{(\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2}{\cos^2\varphi_2} + \ell_2^2\frac{\lambda}{m} - (x_2-x_1)\ddot{x}_1 - (y-y_1)\ddot{y}_1$$
$$+ g(y_2-y_1)$$

használjuk ki az energia megmaradást!

$$E = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\ell_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$
$$-(m_2+m_1)g\ell_1\cos\varphi_1 - m_2 g\ell\cos\varphi_2$$

innen $\dot{\varphi}_2$ kifejezhető

$$(\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2 = \ell_2^2\cos^2\varphi_2\,\dot{\varphi}_2^2$$

$$0 = l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + l_2^2 \frac{\lambda}{m} - l_2 \sin\varphi_2 \ddot{x}_1 - l_2 \cos\varphi_2 \ddot{y}_1 + g\, l_2 \cos\varphi_2$$

ahonnan

$$\lambda = -\dot{\varphi}_2^2 m + \frac{m}{l_2}\left[\sin\varphi_2 \ddot{x}_1 + \cos\varphi_2 (\ddot{y}_1 + g)\right]$$

$\dot{\varphi}_2^2$-et E-ből kifejezzük

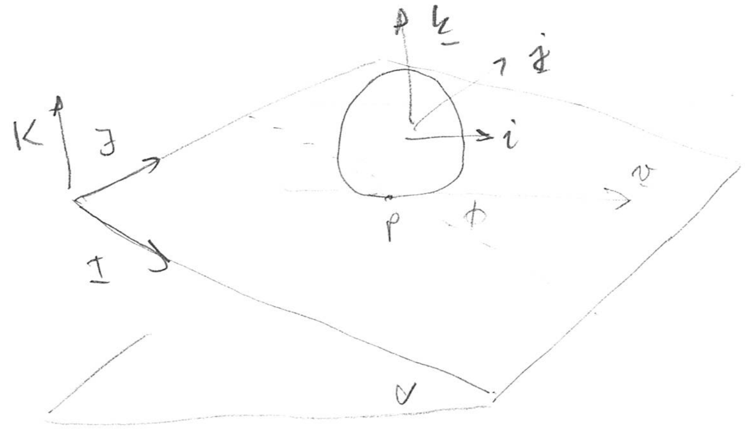
akkor a kényszererőre van formula

$x_1, x_2, y_1, y_2, \dot{x}_1, \dots$ stb: a φ_1, φ_2-vel felírt

(a kényszereket nem-tartalmazó) egyenleteket

meg kell oldani numerikusan

Lejtőn leguruló pénzérme



M, R (x, y, z) tip. koord.

végig $z = R$

(x_0, y_0)-ban $\underline{v}_0$ kezdősebb.

$\dot{\psi}_0 = \frac{v_0}{R}$ $\underline{j}$ körül

$\dot{\phi}_0 = \omega$ $\underline{k} = \underline{K}$ körül

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a pénzérméhez rögz.

Feltételezzük: nem dől el (olyan kezdőfeltételeket választunk)

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\phi}^2 + Mgx\sin\alpha$$

I_2, I_3: tehetetlenségi nyomatékok

$$\underline{\Omega} = \dot{\psi}\,\underline{j} + \dot{\phi}\,\underline{k}$$

$$\underline{v}_P = \underline{V} + \underline{\Omega} \times (-R\underline{k})$$

$$\rightarrow \quad \underline{v}_P = \dot{x}\,\underline{I} + \dot{y}\,\underline{J} - R\dot{\psi}\,\underline{i} = 0 \text{ a lejtőn}$$

gördülés feltétele

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \dot{x} - R\dot{\psi}\cos\phi = 0 \\ G_2 &= \dot{y} - R\dot{\psi}\sin\phi = 0 \end{aligned}\right\} \underline{I}, \underline{J} \text{ komp.}$$

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \dot{x}\cos\phi + \dot{y}\sin\phi - R\dot{\psi} = 0 \\ g_2 &= \dot{x}\sin\phi - \dot{y}\cos\phi = 0 \end{aligned}\right\} \underline{i}, \underline{j} \text{ ben}$$

ehhez kell:

$$\underline{i} = \underline{I}\cos\phi + \underline{J}\sin\phi$$

$$\underline{j} = -\underline{I}\sin\phi + \underline{J}\cos\phi$$

<u>megoldáshoz</u> 6 kezdeti feltétel kell

4 mozgásegyenlet + 2 kényszerfeltétel

$(x_0, y_0, \dot{\psi}_0 = \frac{v_0}{R}, \dot{\phi}_0 = \omega, \psi_0, \phi_0)$

bármelyik kényszer ~~[illegible]~~ helyettesíthető

$$\dot{g}_1 = (\ddot{x}\cos\phi + \ddot{y}\sin\phi) - R\ddot{\psi} = 0 \quad *$$

$$\dot{g}_2 = (\ddot{y}\cos\phi - \ddot{x}\sin\phi) - R\dot{\psi}\dot{\phi} = 0$$

*: előtte $0 = g_2$-t kihasználva

$\Rightarrow$ P pont gyorsulása

$$g_1^{(2)} = (g_1)^2 + (g_2)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - R^2\dot{\psi}^2 = 0$$

mozgásegyenletek:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_j \lambda_j a_{jk}$$

kényszerek: $\left.\begin{aligned}\delta x &= R\cos\phi\,\delta\psi \\ \delta y &= R\sin\phi\,\delta\psi\end{aligned}\right\}$ $1\cdot dx - R\cos\phi\,\delta\psi = 0$

$a_{1x} = 1 \quad a_{1\psi} = -R\cos\phi$

$a_{1\phi} = 0 \quad a_{1y} = 0$

$a_{2x} = 0 \quad a_{2y} = 1 \quad a_{2\psi} = -R\sin\phi \quad a_{2\phi} = 0$

a mozgásegyenletek:

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\phi}^2 + Mg\cancel{x}\sin\alpha$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & M\ddot{x} - Mg\sin\alpha = \lambda_1 \\ (2) & M\ddot{y} = \lambda_2 \\ (3) & I_2\ddot{\psi} = -\lambda_1 R\cos\phi - \lambda_2 R\sin\phi \\ (4) & I_3\ddot{\phi} = 0 \end{array}\right\}\text{ mozgásegyenletek}$$

(4)-ből $\dot{\phi} = \text{áll} = \omega$ → behelyettesíthető a kezdeti feltételből

1,2 → 3 majd a kényszer figyelembevétele (*)

$$J_2 = \frac{1}{2}MR^2$$

(1) $R\ddot{\psi} = \ddot{x}\cos\phi + \ddot{y}\sin\phi$

$\frac{MR^2}{2}$ $I_2\ddot{\psi} = -M\ddot{x}R\cos\phi - M\ddot{y}R\sin\phi + Mg\sin\alpha\cos\phi$

összeadva $\frac{3}{2}R\ddot{\psi} = g\sin\alpha\cos\phi$

$$\frac{3}{2}R\ddot{\psi} = g\sin\alpha\cos\phi$$

$\ddot{\psi} = \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R}\cos\omega t$

$\dot{\psi} = \frac{2}{3\omega}\frac{g\sin\alpha}{R}\sin\omega t$

$$\underline{v} = R\dot{\psi}\,\underline{i} = \underline{i}(v_0 + 4a\omega\sin\omega t)$$

$$a = \frac{g\sin\alpha}{4\omega^2\,3/2} = \frac{g_\alpha}{4\omega^2}$$

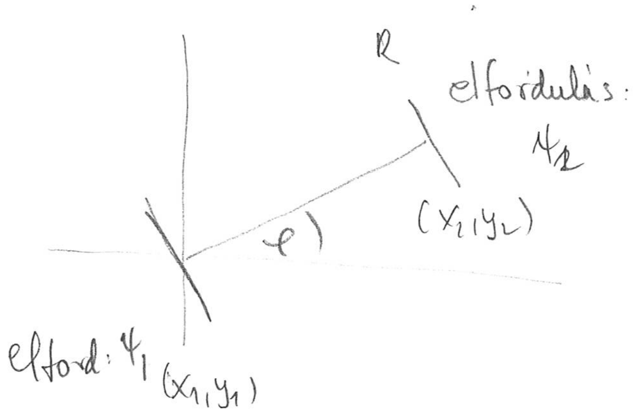
$I, \exists$-ben:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = v_0\cos\omega t + 2a\omega\sin 2\omega t \\ \dot{y} = v_0\sin\omega t + 2a\omega(1-\cos 2\omega t)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x, y \checkmark \\ \ddot{x}, \ddot{y} \Rightarrow \text{kényszererő}\end{array}$$

HF

⑤

2 kerék egy tengelyen



$$x_2 = x_1 + d\cos\varphi$$

$$y_2 = y_1 + d\sin\varphi$$

$$\delta x_1 = -R\delta\Psi_1 \sin\varphi \qquad \langle 1$$

$$\delta y_1 = R\,\delta\Psi_1 \cos\varphi \qquad \langle 2$$

$$\delta x_2 = \delta x_1 - d\sin\varphi\,\delta\varphi = -R\,\delta\Psi_2 \sin\varphi \qquad \langle 3$$

$$\delta y_2 = \delta y_1 + d\cos\varphi\,\delta\varphi = R\,\delta\Psi_2 \cos\varphi \qquad \langle 4$$

$$L = \frac{M_1+M_2}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}M_2 d^2\dot{\varphi}^2 + M_2 d\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\dot{y}_1 - \sin\varphi\,\dot{x}_1)$$

$$+ \frac{1}{4}M_1 R^2\dot{\Psi}_1^2 + \frac{1}{4}M_2 R^2\dot{\Psi}_2^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}\left[(M_1+M_2)\dot{x}_1 - M_2 d\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right]$$

$$= (M_1+M_2)\ddot{x}_1 - M_2 d(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi})$$

$$\overset{!}{=} \lambda_1 + \lambda_3$$

hasonlóan

$$(M_1+M_2)\ddot{y}_1 + M_2 d(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}) = \lambda_2 + \lambda_4$$

$$\frac{1}{2}M_1 R^2\ddot{\Psi}_1 = \lambda_1 R\sin\Psi - \lambda_2 R\cos\varphi$$

$$\frac{1}{2}M_2 R^2\ddot{\Psi}_2 = \lambda_3 R\sin\varphi - \lambda_4 R\cos\varphi$$

$$M_2 d^2\ddot{\varphi} + M_2 d\left[\ddot{y}_1\cos\varphi - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\dot{y}_1 - \sin\varphi\,\ddot{x}_1 - \sin\dot{\varphi}\,\ddot{x}_1\right]$$

$$= -\lambda_3 d\sin\varphi + \lambda_4 d\cos\varphi$$

Sok szabadsági fokú rendszerek kis rezgései

$$L = L(q_1, \dots, q_f, \dot q_1, \dots, \dot q_f, t)$$

feltesszük: $q_i = q_{i0}$ egyensúly

és $$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q)\, \dot q_i \dot q_j - V(q_i)$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

ha egyensúly: $$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \sum a_{ij} \dot q_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{\cancel{j}i}} = \sum a_{ij} \ddot q_j + \sum \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot q_j \dot q_k$$

~~egyensúly, ha~~ $$\frac{\partial L}{\partial q_{\cancel{j}}} = \sum_{ij} \cancel{a} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot q_{\cancel{j}i} \dot q_{\cancel{k}k} - \frac{\partial V}{\partial q_{\cancel{j}i}}$$

$$\sum_j a_{ij} \ddot q_j + \cancel{\sum_{jk} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot q_j \dot q_k - \sum_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot q_i \dot q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

ha $q_i = q_{i0}$ egyensúly: $$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i = q_{i0}} = 0$$

$$x_i = q_i - q_{i0} \qquad m_{ij} := a_{ij}(q_i = q_{i0})$$

levezetése: $$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i = q_{i0}}}_{0} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}}_{K_{ij}} q_j + \dots$$

$$\sum_j \left(m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j \right) = 0$$

Megoldás keresése: $x_k = A_k e^{i\omega t}$ alakban

$$\sum_j \left(-m_{ij} \omega^2 + k_{ij} \right) A_j = 0$$

"sajátértékegyenlet", ω^2 megoldása a

$$\det \left(k_{ij} - \omega^2 m_{ij} \right) = 0$$

egyenletnek. k_{ij}, m_{ij} poz. definit valós mátrixok

$\rightarrow$ gyökök valósak

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ij} A_i^* A_j}{\sum m_{ij} A_i^* A_j}$$

<u>Súrlódás</u>: ha a súrlódás lineáris, a dissipációs

fv: $R = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\gamma_{ij} v_i v_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \gamma_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

$$\sum_j \left(-\omega^2 m_{ij} + i\omega \gamma_{ij} + k_{ij} \right) A_j = 0$$

ez is sajátértékegyenlet

ω megoldása a

$$\det(k_{ij} + i\omega \gamma_{ij} - \omega^2 m_{ij}) = 0$$

egyenletnek ; $\lambda = i\omega - ra$: $\det(k_{ij} + \lambda \gamma_{ij} + \lambda^2 m_{ij}) = 0$

valós polinom $\rightarrow$ ω gyökök párban

$$\omega, \omega^*$$

$\rightarrow$ valós megoldás a diffegyenletnek

λ valós része negatív : $e^{-\mathrm{Re}\,\lambda\, t}$ lecsengés