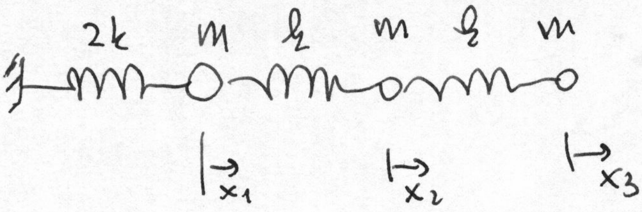
ZH - feladatok megoldása

1.)



$L = K - V \qquad K = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right)$

$V = k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (x_3 - x_2)^2$ 2p

$H = K + V$ K - ban $\dot{x}_i$ - ot p_i - vel kifejezve

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i = \frac{p_i}{m}$$

$$K = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \right)$$ 2p

kanonikus egyenletek:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \rightarrow \dot{x}_i = \frac{p_i}{m_i}$$

$$\dot{p}_1 = - \frac{\partial H}{\partial x_1} = - \left[2k x_1 - k (x_2 - x_1) \right] = k (x_2 - 3x_1)$$

$$\dot{p}_2 = - \frac{\partial H}{\partial x_2} = - k (x_2 - x_1) + k (x_3 - x_2)$$

$$\dot{p}_3 = - \frac{\partial H}{\partial x_3} = - k (x_3 - x_2)$$

3p

így a mozgásegyenletek:

$$p_i = m\dot{x}_i \qquad \dot{p}_i = m\ddot{x}_i$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a mátrix sajátértékeit λ_i -vel jelölve

$$w_i^2 = \frac{k}{m}\lambda_i$$

Itt nincs zérómódus, mert nincs eltolásinvariancia (fal!)

1p

sajátértékek keresése

$$0 = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

$$\underbrace{-(1-\lambda) - (3-\lambda)}_{-(4-2\lambda) = -2(2-\lambda)} =$$

2p

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda) - 2\right]$$

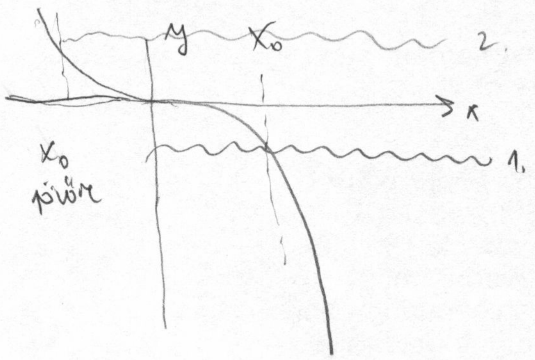
$$\lambda_1 = 2 \qquad 1 - 4\lambda_{2,3} + \lambda_{2,3}^2 = 0$$

$$\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$$

$$\lambda_3 = 2-\sqrt{3} \qquad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

2p

2. Csúszda



$y = -ax^5$ kényszerfelület

1. vízszint most

2. vízszint várhatóan pöröre

Ez ugyanaz, mint a sielős feladat

Kényszerfeltétel : $\varphi(x,y) = y + ax^5 \overset{!}{=} 0$

Mozgásegyenletek : a kényszererő $\lambda \nabla \varphi$

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 5\lambda a x^4$$

$$m\ddot{y} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} - mg = -mg + \lambda$$

a második egyenletből $\lambda = m(\ddot{y} + g)$

másrészt $y = -ax^5$ $\quad \dot{y} = -5ax^4\dot{x}$

$$\ddot{y} = -5ax^4\ddot{x} \quad -20ax^3(\dot{x})^2$$

másrészt, fentről : $\ddot{x} = 5\lambda a x^4$

$$\lambda = m(-25\lambda a^2 x^8 - 20ax^3\dot{x}^2 + g)$$

$\dot{x}^2$ az energiamegmaradásból kifejezhető,

$y_s = y_{start}$ a kezdeti magasság

$$mgy_s = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

$$= \frac{1}{2} m \left(1 - 5ax^4\right) \dot{x}^2 - mg\, ax^5$$

$$\dot{x}^2 = 2\, \frac{gax^5 + gy_s}{1 - 5ax^4}$$

ezt behelyettesítve

$$\lambda = \frac{m}{1 + 25ax^8} \left(20ax^4\, \frac{2g(y_s + ax^5)}{1 + 25ax^8} + g \right)$$

kényszererő: $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5ax^4 \end{pmatrix}$ => a kényszererő 0, ha $\lambda = 0$

λ egyszerűsíthető

$$\lambda = gm\, \frac{1 - 15a^2x^8 - 40\, a\, x^3 y_s}{(1 + 25a^2x^8)^2}$$

hogy épp vízbeéréskor érezzék magukat súlytalannak:

$\lambda = 0$ $x = X_0$ -ban

$$y_s = \frac{1 - 15a^2 X_0^8}{40\, a\, X_0^3}$$

8p

(vagy ennél magasabbról; ez mindig lehetséges) ha $x_0 < 0$ $\quad y_s > -a x_0^5$ kell legyen

$$\lambda = \frac{1 - 15a^2x^8 - 40a\,x^3 y_s}{(1+25a^2x^8)^2}$$

Ha $x_0 < 0$, akkor

$y_s > -a x_0^5 > 0$ kell legyen.

Nézzük meg λ előjelét:

Előjel x_0-ban

$$1 - 15a^2x_0^8 \underbrace{-40a\,x_0^3}_{>0}\underbrace{y_s}_{> -a x_0^5} \text{, mert felülről indult}$$

$$> 1 - 15a^2x_0^8 + 40a^2x_0^8 > 0$$

x-et csökkentve 0-ig a levont

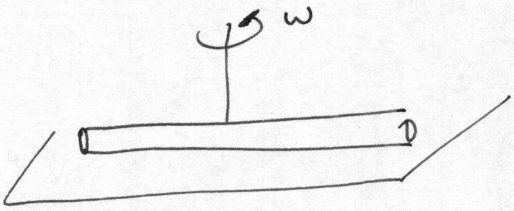
$-15a^2x^8$ gyorsabban közeledik 0-hoz,

mint a pozit. $-40a\,x^3 y_s$

$\rightarrow$ nem válhat 0-vá λ

ilyenkor nem lesz súlytalanság $\qquad$ 2p

3. feladat

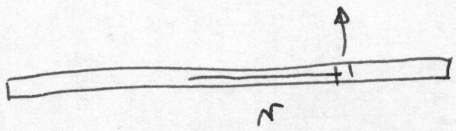


$$\Theta \dot{\omega} = M$$

forgatónyomaték:

$$dM = r\, \cancel{l} \cdot dF$$

$$dF = \mu \cdot \frac{mg}{l}\, dr$$



$$M = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu m g}{l}\, r\, dr = \frac{\mu m g}{4}\, l$$

$$\left[\frac{l^2}{2}\right]_{l/2}^{l/2} =$$

$$\Theta = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l}\, r^2 dr = \frac{m l^2}{12}$$

$$\frac{m}{l}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2} = 2 \cdot \frac{m}{l}\, \frac{1}{8}\, \frac{1}{3}\, l^3$$

$$\frac{m l^2}{12}\, \dot{\omega} = -\frac{\mu m g}{4}\, l \qquad \text{(amíg } \omega \text{ 0-vá nem válik)}$$

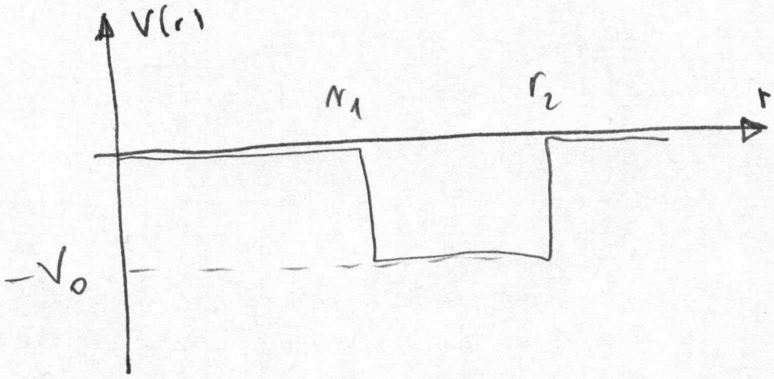
$$\dot{\omega} = -\frac{3\mu g}{l}$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{3\mu g}{l}\, t \qquad \text{megálláskor} \qquad t = \frac{\omega_0 l}{3\mu g}$$

3p

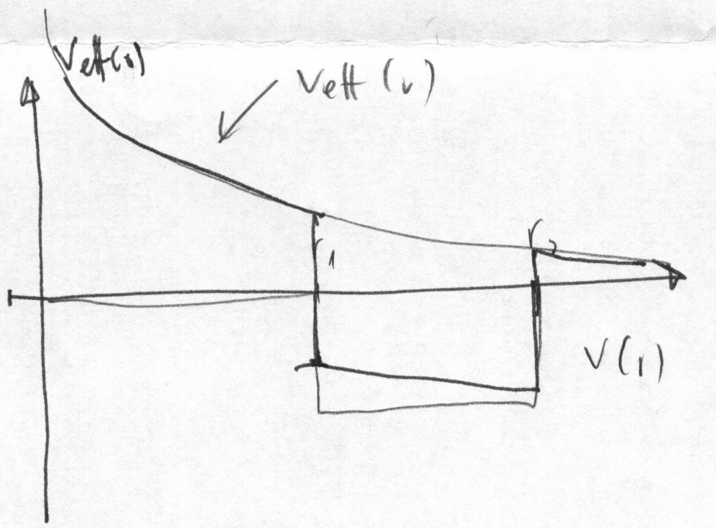
4. feladat

centrális potenciál



körpálya: effekt. potenciál egyensúlyi pontja:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$



az ábráról leolvasható

- a potenciál minimumhelye: $r = r_2$
- ez stabil (tényleg lok. minimum) → körpálya stabil

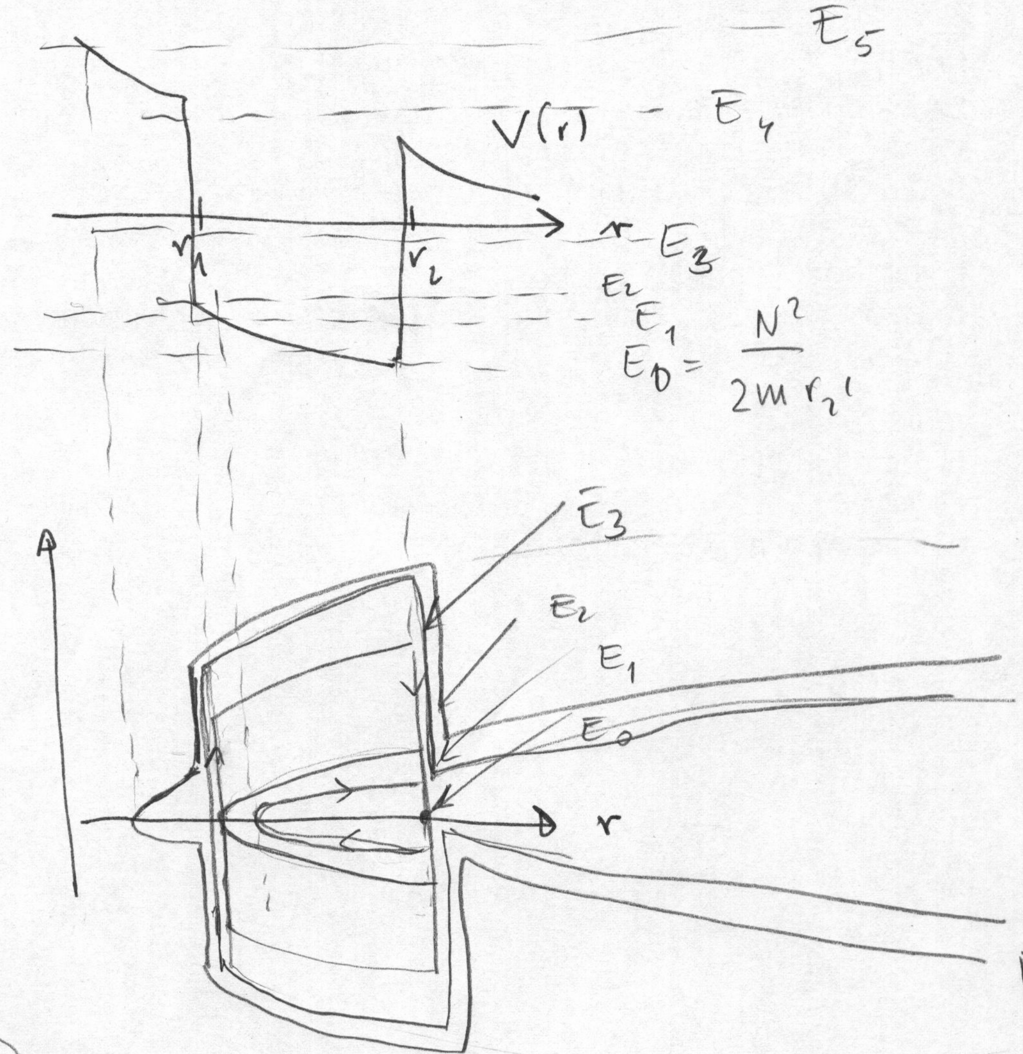
3 pont

tetszőleges N esetén

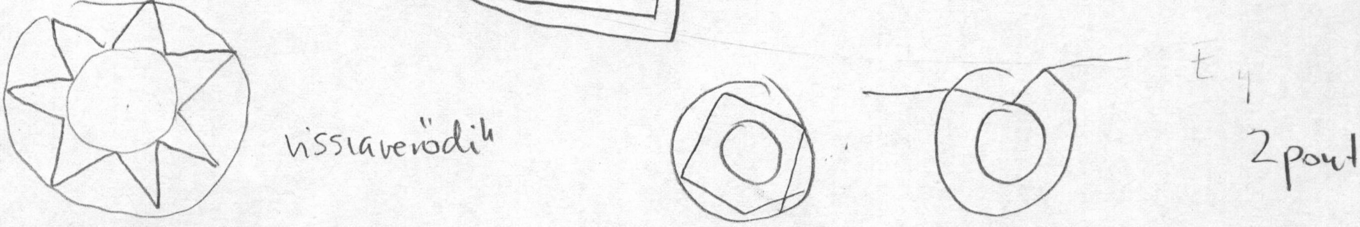
- energiája $\frac{N^2}{2mr_2^2} - V_0$

2 pont

Fázistér radiális része:



pálya:



r_2 lassú változtatása: adiabatikus invariáns

$$I = \oint p\, dq$$

$q = r$ sugár

$$p = m\dot{r} \qquad \frac{p^2}{2m} + V_{eff}(r) = E$$

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{N^2}{2mr^2} = E + V_0 = \tilde{E}$$

tehát

$$p = \pm\sqrt{2m\tilde{E} - \frac{N^2}{r^2}}$$

és ~~ezt~~ az integrált egy periódusra kell elvégezni

$$I = \oint p\,dq = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\tilde{E} - N^2/r^2}\,dr + \int_{r_2}^{r_1} \left(-\sqrt{}\right) dr$$

$$= 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\tilde{E} - N^2/r^2}\,dr$$

Ha r_1, r_2 nagy : N^2/r^2 elhanyagolása

$$p = \pm\sqrt{2m\tilde{E}}$$

$$I \approx 2\sqrt{2m\tilde{E}}\,(r_2 - r_1)$$

ha összenyomjuk, ~~akk.~~ $\tilde{E}$ nő ($I = \text{áll.}$)

amikor $\tilde{E} > V_0$ lesz, a pálya nyílttá válik,

$$(r_2 - r_1)_{min} = \frac{\sqrt{2m\tilde{E}}\,(r_2 - r_1)}{\sqrt{V_0}}$$

3 p

5. feladat

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 \quad - U(\phi)$$

$$\dot{} = \frac{\partial}{\partial t} \qquad {}' = \frac{\partial}{\partial x} \qquad U(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \underbrace{\frac{m^2}{\lambda}}_{\eta^2}\right)^2$$

- téregyenlet felírása:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = -\phi'$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi} = -\lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi$$

ezzel a téregyenlet

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi = 0$$

2 pont

$$\phi_K = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{th}\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\,\frac{(x - x_0) - ut}{\sqrt{1-u^2}}\right]$$

vegyük észre: eltolásinvariancia miatt $x_0 = 0$ választható

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$\phi_K' = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{m}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2[\ldots]} = \frac{m^2}{\sqrt{2\lambda}\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{ch}^{-2}[\ldots]$$

$$\phi_k'' = -\cancel{2}\frac{m^3}{\cancel{2}\sqrt{\lambda}(1-u^2)} \quad ch^{-3}[\quad]\, sh[\ .\ ]$$

$$\dot{\phi}_k = -u\, \phi_k'$$

$$\ddot{\phi}_k = u^2\, \phi_k''$$

$$\ddot{\phi}_k - \phi_k'' = \frac{m^3\,(\cancel{1-u^2})}{\sqrt{\lambda}\,(\cancel{1-u^2})} \quad \frac{sh[\ ..\ ]}{ch^3[\ ..\ ]}$$

$$\phi^2 = \overset{\eta^2}{\frac{m^2}{\lambda}}\; th^2[\ \ldots\ ]$$

$$\phi^2 - \eta^2 = \eta^2\left(th^2[\ ..\ ] - 1\right)$$

$$\frac{sh^2}{ch^2} - \frac{ch^2}{ch^2} = \frac{sh^2 - ch^2}{ch^2} = -\frac{1}{ch^2}$$

$$\underbrace{\lambda\,(\phi^2-\eta^2)}_{-\frac{m^2}{\lambda}\frac{1}{ch^2[..]}}\phi = -\lambda\,\frac{m^2}{\lambda}\,\frac{1}{ch^2[\ \ldots\ ]}\,\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{sh[\ ..\ ]}{ch[\ ..\ ]} =$$

$$-\frac{m^3}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{sh[\ \ldots\ ]}{ch^3[\ \ldots\ ]}$$

ahonnan már látható, hogy kielégítik a téregyenletet.

Mj: Lorentz-tf-val $u = 0$ is elérhető