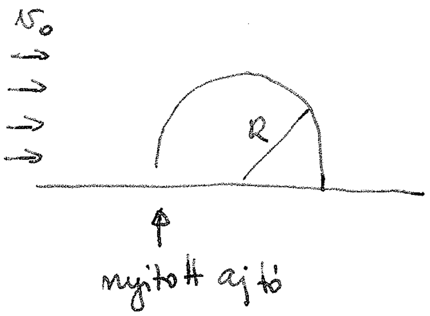
1. Hangárra ható erő

Elm. Fiz. Pt. 16.26



$R = 10$ m sugarú, $l = 70$ m hosszú hangár

("nagyon hosszú → 2D áramlás)

$v_0 = 72 \frac{km}{h} = 20 \frac{m}{s}$ sebességű szél, $\rho_{levegő} = 1{,}2 \frac{kg}{m^3}$

Mekkora erő hat a hangárra?

Először kitaláljuk a komplex sebességpotenciált. Az áramlási kép valami ilyen:

Ez épp a henger körüli áramlás nulla cirkulációval!

$$f(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$$

ha $z = r e^{i\varphi}$ $\quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$, ezt beírva

$$\varphi = \mathrm{Re}\, f = v_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos\vartheta$$

$$\psi = \mathrm{Im}\, f = v_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin\vartheta$$

Ez eddig az előadáson szerepelt.

Alkalmazzuk most ezt a hangárra ható erő kiszámolására.

Belső nyomás: a Bernoulli-tételt alkalmazzuk a stagnációs pontban ("az ajtóban") végződő áramvonalra (ezért fontos a nyitott ajtó)

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_b$$

Nyomáseloszlás kívül: szintén a Bernoulli-tételből, "épp súroló" áramvonalra alkalmazva:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 = p_k + \frac{1}{2}\varrho|v|^2 \qquad v = \frac{1}{2}(f')$$

$$p_k = \underbrace{p_\infty + \frac{1}{2}\varrho v_0^2}_{p_b} - \frac{1}{2}\varrho|v|^2$$

$$p_k - p_b = -\frac{1}{2}\varrho|v|^2 = -\frac{1}{2}\varrho\, f'f'^*$$

az erő $\underline{F} = (D, L)$ D: drag L: Lift

komplex alak $F = D + iL$ könnyen látható:

$$F^* = D - iL = -i\int_C p\, dz^*$$

ahol C a testet határoló kontúr

$$p = p_k - p_b$$

így most $p = p_k - p_b = -\frac{1}{2}\varrho|v|^2 = -\frac{1}{2}\varrho\, f'f'^*$

$$F^* = \frac{i\varrho}{2}\int_C f'f'^*\, dz^* = \frac{i\varrho}{2}\int_C (f')^2\, dz$$

f'^* és dz párhuzamos vektorok

$\Rightarrow$ $*$ "átdobható"

$$f(z) = v_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$$

$$f'(z) = v_0\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) \qquad (f'(z))^2 = v_0^2\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)^2 = v_0^2\left(1 - \frac{2R^2}{z^2} + \frac{R^4}{z^4}\right)$$

primitív függvény $\int(f'(z))^2 dz = v_0^2\left(z + \frac{2R^2}{z} - \frac{R^4}{3z^3}\right)$

a kontúrintegrál így a Newton-Leibniz-formula szerint számolható.

Irányítás: pozitív, ha a kezdőpont $z = R$, a végpont $-R$, így

$$F^* = D - iL = i\frac{\rho v_0^2}{2}\left[z + \frac{2R^2}{z} - \frac{R^4}{3z^3}\right]_{z=R}^{-R} = i\frac{\rho v_0^2}{2}\left[-(2R+4R)+\frac{2}{3}R\right]$$

$$= -i\,\frac{8}{3}v_0^2 R \qquad D = 0 \qquad L = \frac{8}{3}v_0^2 R$$

ez a hosszegységre ható erő! A teljes erő:

$$F_{\text{emelő}} = \frac{8}{3}\rho v_0^2 R\, l = \frac{8}{3}\cdot\left(20\,\frac{m}{s}\right)^2\cdot 10\,m\cdot 70\,m\cdot 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$$

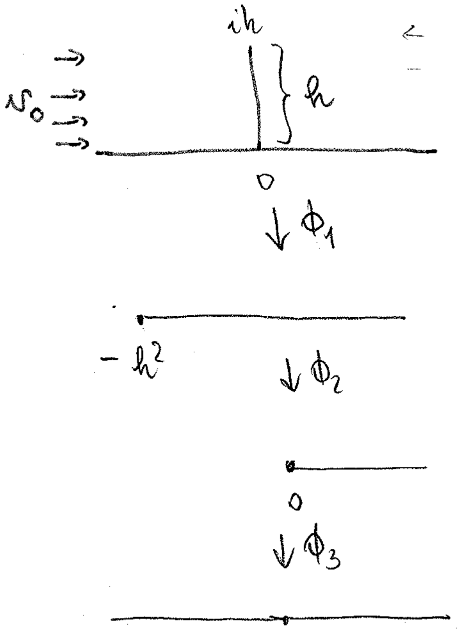
$$= \frac{8}{3}\cdot\overbrace{400\cdot 10\cdot 70}^{280000}\cdot 1{,}2\,\frac{kg\cdot m}{s^2} \qquad \underbrace{\tfrac{8}{3}\cdot 1{,}2}_{8\cdot 0{,}4\,=\,3{,}2}$$

$$\begin{array}{r} 280000\cdot 3{,}2 = 8{,}96\cdot 10^5 \\ 840000 \\ 560000 \\ \hline 896000{,}0 \end{array}$$

$$= 8{,}96\cdot 10^5\ N$$

Ekkora erő emeli tehát a hangárt.

2. Akadály az áramlás útjában (Elm.Fn. Pt. 16.28)



Határozzuk meg az áramlási teret!

Konform leképezés módszer:

$$z_1 = \Phi_1(z) = z^2 \quad \text{leképezés}$$

$$z_2 = \Phi_2(z_1) = z_1 + h^2 = z^2 + h^2$$

$$z_3 = \Phi_3(z_2) = \sqrt{z_2} = \sqrt{z^2+h^2}$$

$$f(z) = v_0 z_3 = v_0\sqrt{z^2+h^2}$$

Sebességmerő

$$v^* = v_x - i v_y = f'(z) = \frac{v_0 z}{\sqrt{z^2 + h^2}}$$

Áramvonalak egyenlete: $\quad \mathrm{Im}\, f(z) = \text{áll.}$

$$f(z) = v_0 \sqrt{z^2 + h^2}$$

Im$f(z)$ vizsgálatához meg kellene szabadulni a gyöktől. Legyen tehát $\quad z = ih\cos(\zeta) \quad$ ahol $\quad \zeta = \xi + i\eta$.

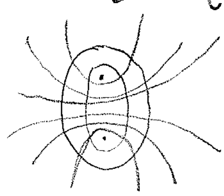
$$z^2 = -h^2 \cos^2 \zeta \qquad f(z) = v_0 h \sqrt{1 - \cos^2 \zeta} = v_0 h \sin \zeta$$

$$\sin(\zeta) = \sin(\xi + i\eta) = \sin(\xi)\,\mathrm{ch}(\eta) + i\cos(\xi)\,\mathrm{sh}(\eta)$$, tehát

$$\mathrm{Im}\, f(z) = v_0 h \cos(\xi)\,\mathrm{sh}(\eta) \quad =: v_0 C$$

$$x + iy = ih\cos(\xi + i\eta) \quad \to x = h\sin(\xi)\,\mathrm{sh}(\eta) \qquad y = h\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta$$

elliptikus koordináták



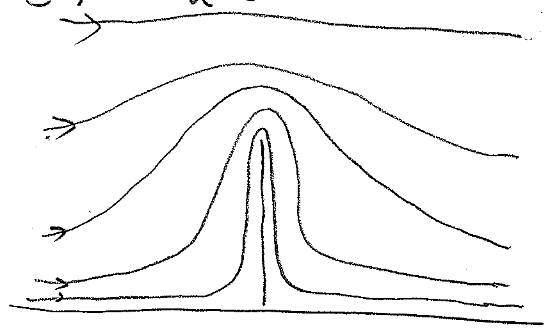
ekkor

$$(x^2 + c^2)(y^2 - c^2) = h^2(\sin^2\xi\,\mathrm{sh}^2\eta + \cos^2\xi\,\mathrm{sh}^2\xi)$$
$$h^2(\cos^2\xi\,\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\xi\,\mathrm{sh}^2\xi) =$$
$$= h^4\,\mathrm{sh}^2\xi\cos^2\xi = h^2 C^2$$

tehát az áramvonalak egyenlete:

$$(x^2 + c^2)(y^2 - c^2) = h^2 C^2$$

Ezt lerajzolva:



A síklapra ható erő: (csak drag, x irányú komponens)

$$D - iL = F^* = -i \int_C p \, dz^*$$

kontúr: C 

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p + \frac{1}{2}\rho|v|^2 = p + \frac{1}{2} f' f'^*$$

p_∞ konstans $\qquad p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_0^2 - \frac{1}{2} f' f'^*$

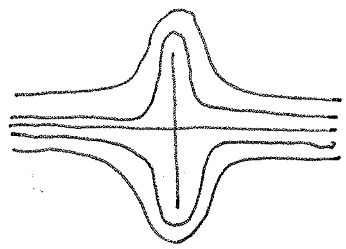
$\frac{1}{2}\rho v_0^2$ — " —

így a fenti kontúrra vett integrálja 0 (vastagság → 0)

$$f(z) = v_0 \sqrt{z^2 + h^2}$$

$$f'(z) = \frac{v_0 z}{\sqrt{z^2+h^2}} \qquad (f'(z))^2 = \frac{v_0^2 z^2}{z^2+h^2}$$

Kétszerezzük meg a lemezt (akadályt)!



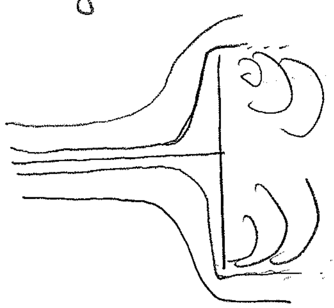
$C' =$ 

így csak az x irányú (drag) erőt számoljuk

$(f'(z))^2$ páros fv → C'-re vett integrálja 0

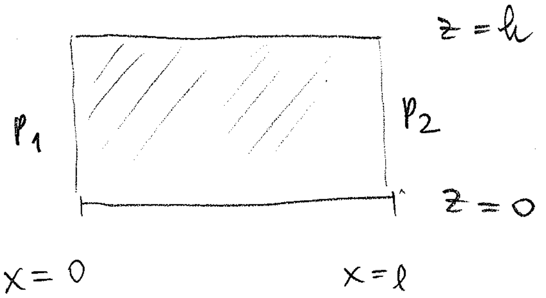
A LEMEZKÉRE NEM HAT ERŐ!

a valóságban nem ezt tapasztaljuk! A közelítés elromlik:



(A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Band II. Mechanik der deformierbaren Medien, §29)

3. Súrlódó folyadék áramlása síklapok között



Határozzuk meg egy összenyomhatatlan, viszkózus folyadék áramlását két, egymástól d távolságra lévő síklap között, $\Delta p = p_2 - p_1$ nyomáskülönbség hatására!

Határfeltételek: $\underline{v}(z=0) = 0 \qquad \underline{v}(z=h) = 0 \qquad p(x=0) = p_1$

$p(x=l) = p_2$

Navier-Stokes-egyenletek összenyomhatatlan folyadékra:

$$\dot{\underline{v}} + (\underline{v}\nabla)\underline{v} = \underline{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{\eta}{\varrho}\Delta\underline{v}$$

összenyomhatatlanság: $\nabla\underline{v} = 0$ és $\underline{F} = 0$

Tfh: $v_y = v_z = 0 \qquad v_x = v_x(x,z) \qquad p = p(x)$

N-S: $$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}p'(x) + \frac{\eta}{\varrho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x$$

$\nabla\underline{v}$: $\partial_x v_x = 0 \Rightarrow v_x(x,y) = v_x(z)$

ezt a N-S-egyenletbe beírva:

$$0 = -\frac{1}{\varrho}p'(x) + \frac{\eta}{\varrho}v_x''(z)$$

$$p'(x) = \eta v_x''(z)$$

ezek csak úgy lehetnek egyenlők, ha állandók, ui. az egyik csak x-től, a másik csak z-től függ

$$p'(x) = \text{const} \Rightarrow p(x) = \frac{p_2 - p_1}{l}x = \frac{\Delta p}{l}x$$

$p'(x) = \frac{\Delta p}{\ell}$ tehát

$$v_x''(z) = \frac{1}{\eta} p'(x) = \frac{\Delta p}{\eta \ell}$$ integrálva:

$$v_x'(z) = \frac{\Delta p}{\eta \ell} z + c_1$$ ismét

$$v_x(z) = \frac{\Delta p}{2\eta \ell} z^2 + c_1 z + c_2$$

Határfeltételek figyelembevétele:

$$v_x(z=0) = 0 \qquad v_x(0) = c_2 = 0$$

$$v_x(z=h) = 0 \qquad v_x(h) = \frac{\Delta p}{2\eta \ell} h^2 + c_1 h = 0$$

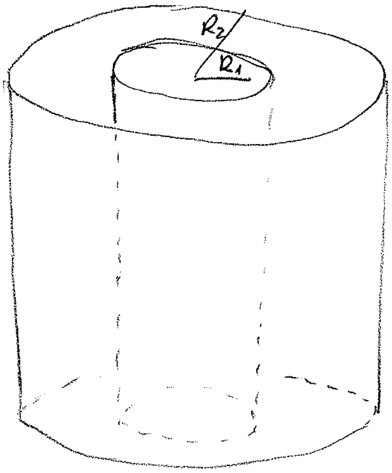
$$c_1 = -\frac{\Delta p}{2\eta \ell} h$$

$$\boxed{v_x(z) = \frac{\Delta p}{2\eta \ell} (z^2 - hz)}$$

folyadékmennyiség (egységnyi y irányú sző felületen át)

$$\int_0^h v_x(z)\,dz = \frac{\Delta p}{2\eta \ell} \left(\underset{\frac{2}{6}}{h^3/3} - \underset{\frac{3}{6}}{h^3/2} \right) = -\frac{\Delta p}{12\eta \ell} h^3$$

4. Couette-áramlás



Folyadék 2 koaxiális henger között

a belső henger ω körsebességgel forog

határfeltételek:

$$\underline{v}(r=R_2)=0$$

$$\underline{v}(r=R_1) = \omega R_1 \, \underline{e}_\vartheta$$

NS: $$\dot{\underline{v}} + (\underline{v}\nabla)\underline{v} = \underline{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta \underline{v}$$

összenyomhatatlanság: $\nabla \underline{v} = 0$

Tételezzük fel, hogy $\underline{v} = v(r)\,\underline{e}_\vartheta$ $\quad p = p(r)$

Hengerkoordináták alkalmazása:

$$\underline{v} = v(r)\,\underline{e}_\vartheta$$

$$(\underline{v}\nabla)\underline{v} = v(r)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(v(r)\,\underline{e}_\vartheta\right) = -\frac{v(r)^2}{r}\,\underline{e}_r$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\underline{e}_\vartheta = \frac{-1}{r}\underline{e}_r$$

a NS-egyenletnek csak a radiális komponense nem 0 a baloldalán:

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}p'(r)$$

ϑ-komponens:
divergenciaegyenlet:

$$0 = \frac{\eta}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv)\right) \quad *$$

div $v = 0$ automatikusan teljesül

* kiszámolás: $-$rot rot v-vel, a jól ismert hengerkoordinátákban,
ld. pl. Landau – Lifsic: Elm. Fiz. VIII. függelékében

az egyenletek nagyon jól kezelhetők, mert a ϑ-komponensből $v(r)$ meghatározható, utána pedig a radiálisból $p(r)$

$$\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{1}{r}(rv)'\right)' = 0$$

$$\left(\frac{1}{r}(rv)'\right)' = 0 \qquad \text{integráljuk}$$

$$\frac{1}{r}(rv)' = c_1$$

$$(rv)' = c_1 r \qquad \text{ezt is}$$

$$rv = \frac{c_1}{2} r^2 + c_2$$

$$v = Ar + \frac{B}{r}$$

$v(R_1) = \omega R_1$ $\quad v(R_2) = 0$ $\quad$ határfeltételek figyelembevétele:

$$A = -\frac{\omega^2 R^2}{R_2^2 - R_1^2} \qquad B = \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

a másik egyenletből meghatározható a nyomás

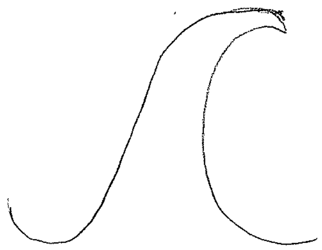
$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{A^2r^2 + 2AB + B^2/r^2}{r} = -\left(A^2 r + \frac{2AB}{r} + \frac{B^2}{r^3}\right) = -\frac{1}{\rho}p'$$

$$p(r) = p_0 + \frac{A^2r^2}{2} + 2AB\log r - \frac{B^2}{2r^2}$$

miért nő? Centripetális gyorsulása van a folyadéknak.

Kundu - Cohen: Fluid Mechanics, Ch. 6.

5. Vízhullámok



bukóhullám

hullámok terjedési sebessége (fázissebesség):

$$c = \sqrt{gH}$$

a pontos, ha $Hk \ll 1$. Mi történik, ha véges amplitúdókat kell figyelembe venni? A nemlinearitások fontossá válnak.

Közelítés: a hullám egyes részei más-más sebességgel terjednek $\rightarrow$ ahol az amplitúdó nagy, ott a hullámok gyorsabbak

$\rightarrow$ a hullámhegyek előreszaladnak

$\rightarrow$ a hullám átbukik

Tehát:

- előadáson szerepelt, hogy a hullámok a part felé megtörnek
- most láttuk: a hullámok átbuknak

Mind a kettő a hullámterjedés mélység- (és így amplitúdó-) függésével kapcsolatos effektus.