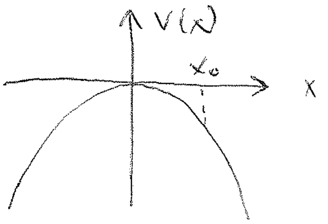
A $-ax^4$ potenciál $(a>0)$



$$V(x) = -ax^4$$

energiamegmaradás: $K + V = E = \text{áll.}$

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$$

vizsgáljuk meg speciálisan a nulla összenergiájú mozgást: $E=0$

$$\frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - a x^4 = 0$$

innen $\quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2a}{m}}\, x^2$

a) Mozgás "balra": $\dot{x} < 0$, x_0 pontból indítva:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\sqrt{\frac{2a}{m}}\, x^2$$

$$\frac{dx}{x^2} = -\sqrt{\frac{2a}{m}}\, dt$$

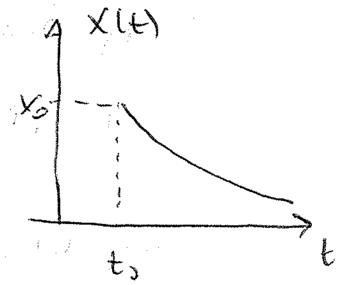
$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = -\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{2a}{m}}\, dt' = -\sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t-t_0)$$

$$\Vert$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

ahonnan

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t-t_0)}$$



Mikor válik $x(t)$ nullává? Ha $t \to \infty$! Nagy t-re $\frac{1}{x_0}$ t-elhanyagolható: $\quad x(t) \sim \sqrt{\frac{m}{2a}}\, \frac{1}{t}$

b.) "jobbra" $v_0 > 0$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2a}{m}}\; x^2$$

az egyenletet az előbbi eset mintájára

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t-t_0)}$$

Mikor válik $x(t)$ végtelenné? Ha a nevező 0:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2a}}\;\frac{1}{x_0} \qquad < \infty$$

A részecske véges idő alatt a végtelenbe távozik.

Tanulság:

a.) eset: a maximum elérése x^4 potenciálban is végtelen sok időbe telik ("éppen elegendő" energia esetén). Érdemes elgondolkozni, hogy ennek mi köze van a diffegyenletek megoldásának unicitásához, és hogy tudunk-e olyan potenciált, ahol nem így van (pl. $-|x|^{3/2}$) és miért?

b) eset: $-ax^4$ pot. instabil

x^4 potenciál

Az előadáson szerepet : $V(x) = -V_2 x^2 + V_4 x^4$

Emlékeztető :

$V_2 > 0$ 3 egyensúly: $x = \begin{cases} -x_0 & \text{stabil} \\ 0 & \text{instabil} \\ x_0 & \text{stabil} \end{cases}$

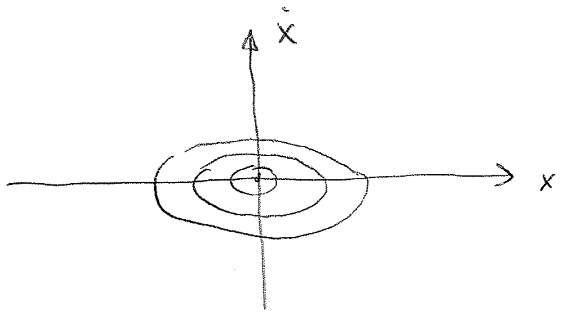
$V_2 < 0$ 1 egyensúly $x=0$ stabil

$V_2 = 0$ -nál bifurkáció

Vizsgáljuk meg az egyensúlyok körüli kis rezgéseket!

a) $V_2 < 0$

fázis térkép :



egyensúly: $x=0$

ekörül a potenciál: $V(x) = \underbrace{-V_2}_{\text{ez poz.!}} x^2 + \dots$

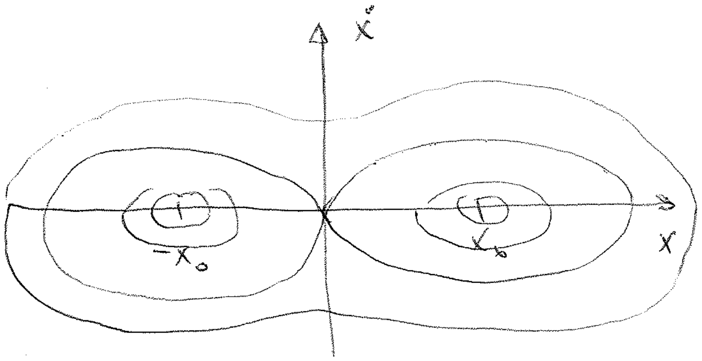
kis rezgések frekv.: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2|V_2|}{m}}$

érdekesség: $V_2 \to 0$ esetén az egyensúly stabilitása elvész

$\omega_0 \to 0$ periódusidő: $T_0 \to \infty$

b.) $V_2 > 0$

emlékeztető: fázisdiagram:



$$x_0^2 = \frac{V_2}{2V_4}$$

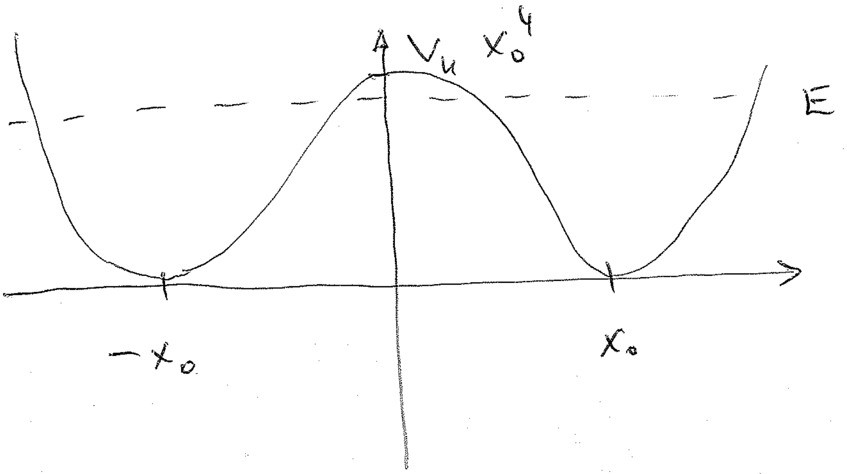
a potenciált teljes négyzetté alakítjuk:

$$V(x) = V_4 \left(x^2 - \frac{V_2}{2V_4} \right)^2 - \frac{V_2^2}{4V_4}$$

$$= V_4 \left(x^2 - x_0^2 \right)^2 - \frac{V_2^2}{4V_4}$$

az energia nullszintjét eltolva, vizsgáljuk inkább a

$V(x) = V_4 \left(x^2 - x_0^2 \right)^2$ potenciált



A potenciál sorfejtése az x_0 pont körül

$$V(x) = V_4\,(x^2 - x_0^2)^2 \approx V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \dots$$

$$V'(x) = 2V_4\,(x^2 - x_0^2)\,2x = 4V_4\,(x^2 - x_0^2)\,x$$

$$V'(x_0) = 0$$

$$V''(x) = 4V_4\,(x^2 - x_0^2) + 4V_4\,\overset{2x\cdot x}{\cancel{4x^2}}$$

$$= 4V_4\,(3x^2 - x_0^2)$$

$$V''(x_0) = 8V_4\,x_0^2 = 8V_4\,\frac{V_2}{2V_4} = 4V_2$$

Kis rezg. frekv.: $\omega_{x_0} = \sqrt{\frac{4V_2}{m}} = 2\sqrt{\frac{V_2}{m}}$

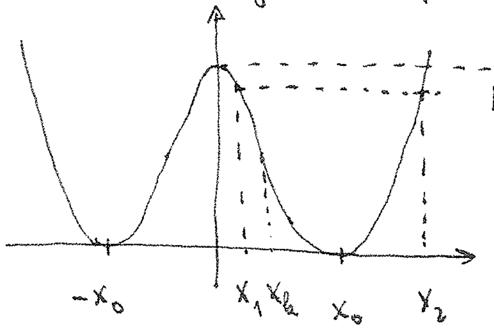
A bifurkációhoz közelítve:

$\cancel{x_0}$ $V_2 \to +0$-ra $\quad \omega_{x_0} \to 0$

periódusidő: $T_{x_0} \to \infty$

a periódusidő itt is végtelenhez tart!

Számoljuk ki most a $V_2 > 0$ esetben a periódusidőt akkor, ha az energia a potenciál maximumánál csak egy kicsit kisebb!



$$V_{max} = V_4 x_0^4$$

$$E = V_4 x_0^4 - E_1$$

E_1 kicsi, de pozitív

Megfordulási pontok: ahol a részecskének csak potenciális energiája van:

$$V_4 \left(x_{1,2}^2 - x_0^2\right)^2 = E$$

$$x_{1,2}^2 = x_0^2 \mp \sqrt{\frac{E}{V_4}}$$

ahonnan (előjel az ábra alapján): $$x_{1,2} = \sqrt{x_0^2 \mp \sqrt{\frac{E}{V_4}}}$$

A periódusidőt a jól ismert

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$

formulával számoljuk. Hogy jó közelítést tudjunk kidolgozni, vegyünk fel egy x_k pontot, hogy a $[0, x_k]$ intervallumon a potenciált a

$$V(x) \approx V_0 x_0^4 - 2 V_4 x_0^2 x^2$$

parabola jól közelítse. Ha E_1 elég kicsi, akkor

$0 < x_1 < x_k$. x_1-et is számolhatjuk a parabolából:

$$V(x_1) = E \longrightarrow V_4 x_0^2 - 2V_4 x_0^2 x_1^2 \approx V_4 x_0^2 - E_1$$

ahonnan $\quad x_1 \approx \frac{1}{x_0}\sqrt{\frac{E}{2V_4}}$

a periódusidő:

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} = \underbrace{2\int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}}_{T_1} + \underbrace{2\int_{x_k}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}}_{T_2}$$

a T_1-ben alkalmazhatjuk a $V(x) \approx V_0 x_0^4 - 2V_4 x_0^2 x^2$ közelítést:

$$T_1 = 2\int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} \qquad \begin{aligned} V(x) &\approx V_4 x_0^4 - 2V_4 x_0^2 x^2 \\ E &= V_4 x_0^4 - E_1 \end{aligned}$$

a közelítéseket beírva:

$$\frac{2}{m}(E-V(x)) \approx \frac{2}{m}\left(V_0 x_0^4 - E_1 - (V_4 x_0^4 - 2V_4 x_0^2 x^2)\right) =$$

$$= \frac{2}{m}(2V_4 x_0^2 x^2 - E_1) = \frac{4}{m} V_4 x_0^2 \Big(x^2 - \underbrace{\frac{E_1}{2V_4 x_0^2}}_{a^2} \Big)$$

$$T_1 \approx 2\int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{4V_4 x_0^2}{m}(x^2-a^2)}} = \sqrt{\frac{m}{V_4 x_0^2}} \int_{x_1}^{x_k} \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{V_4 x_0^2}} \left[\operatorname{arch}\frac{x}{a}\right]_{x_1}^{x_k} = \sqrt{\frac{m}{V_4 x_0^2}} \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]_{x_1}^{x_k}$$

nézzük meg, hogy ezt hogyan lehet közelíteni!

$$\left[\ln(\dots)\right]_{x_1}^{x_k} = \ln \frac{x_k + \sqrt{x_k^2 - \frac{E_1}{2V_4x_0^2}}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - \frac{E_1}{2V_4x_0^2}}}$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0}\sqrt{\frac{E_1}{2V_4}} \implies \text{a nevező } x_1$$

számláló:

$$\sqrt{x_k^2 - \frac{E_1}{2V_4x_0^2}} \approx x_k\left(1 + \frac{E_1}{4V_4x_0^2x_k^2}\right)$$

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

ln (számláló):

$$\ln\left(x_k\left[1 + \frac{E_1}{4V_4x_0^2x_k^2}\right]\right) = \ln x_k + \frac{E_1}{4V_4x_0^2x_k^2}$$

$$\ln(1+\varepsilon) = 1 + \varepsilon$$

kicsi, mert E_1 kicsi

~~ln (~~

így a teljes tört logaritmusa:

$$\ln\frac{\dots}{\dots} = \ln(\text{számláló}) - \ln(\text{nevező}) =$$

$$\ln x_k - \ln x_1 = \ln\frac{x_k}{x_1}.$$

$$= -\ln\frac{x_1}{x_k} = -\ln\frac{1}{x_0x_k}\sqrt{\frac{E_1}{2V_4}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{E_1}{2V_4x_0^2x_k^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{E_1}{2V_4x_0^4} - \frac{1}{2}\ln\frac{x_0^2}{x_k^2}$$

a másik $\to\infty$, így elhagyható

ezzel:

$$T_1 \approx \sqrt{\frac{m}{V_4 x_0^2}} \quad \ln\left[\frac{x_k + \sqrt{x_k^2 - a^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}\right]_{x_1}^{x_k} =$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{V_4 x_0^2}} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{E_1}{2V_4 x_0^4}$$

ha $E_1 \to 0$ $\quad (E \to V_{max})$ $\qquad T_1 \to \infty$

T_2 véges, így azt a teljes periódusidőben elhanyagolhatjuk,

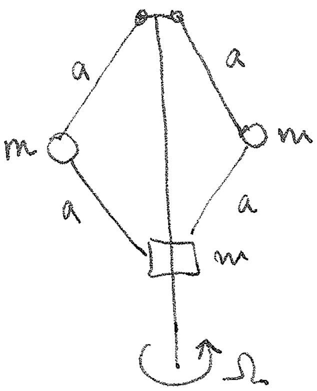
$$T \approx -\sqrt{\frac{m}{V_4 x_0^2}} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{E_1}{2V_4 x_0^4}$$

Tanulság:

- ha a maximum közelében a potenciál parabolával közelíthető, akkor a potenciálmaximum elérése éppen elegendő energiával ∞ ideig tart.
- ha $E \to V_{max}$, akkor a maximum eléréséhez szükséges idő asztimptotikusan

$$T \sim -(\ldots) \ln (V_{max} - E)$$

Centrifugálregulátor kis rezgései (Elm Fiz Példatár 10.23)



Ω szögsebességgel forog

kis rezgések periódusideje = ?

Energiakifejezés:

a 2 oldalsó test távolsága a nem forgó esetben elfoglalt helyüktől: $a\,(1-\cos\vartheta)$ tömeg: $2m$

alsó testé: $2a\,(1-\cos\vartheta)$ tömeg: m

így $U_{\text{gravitációs}} = -4mag\cos\vartheta + \text{const.}$

$$= -2ma^2\Omega_0^2\cos\vartheta \qquad \Omega_0 = \frac{2g}{a}$$

kinetikus energia:

lap síkjára merőleges sebességkomponensből

$$m\,a^2\sin^2\vartheta\;\Omega^2$$

függőleges irány:

oldalsó testek: $2\,\frac{1}{2}m\,(a\sin\vartheta\,\dot\vartheta)^2$ (fenti magasság deriváltja)

↑ 2 ilyen test van

alsó: $\frac{1}{2}m\,(2a\sin\vartheta\,\dot\vartheta)^2$

oldalirány:

távolság $a \cdot \sin\vartheta$

deriváltja: $a \cos\vartheta\, \dot\vartheta$

energiatag: $\frac{1}{2} m a^2 (\cos\vartheta\, \dot\vartheta)^2$

összeadva a teljes energia:

$$E = \underbrace{m a^2 (1 + 2\sin^2\vartheta)(\dot\vartheta)^2}_{K} \underbrace{- m a^2 (\Omega^2 \sin^2\vartheta + 2\Omega_0^2 \cos\vartheta)}_{U}$$

egyensúly keresése: potenciális energia minimuma:

$$\Omega^2 \sin^2\vartheta + 2\Omega_0^2 \cos\vartheta = \Omega^2 - \Omega^2\cos^2\vartheta + 2\Omega_0^2 \cos\vartheta$$

$\cos\vartheta$ szerint deriválva: ϑ_0 legyen a minimumhely

$$-2\Omega^2 \cos\vartheta_0 + 2\Omega_0^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\cos\vartheta_0 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$$

ez a minimum akkor létezik, ha $\Omega^2 > \Omega_0^2$, azaz, ha a centrifugálregulátor elég gyorsan forog.

Fejtsük sorba a minimum körül a kinetikus és a potenciális energiát is!

$$K = \underbrace{m a^2 (1 + 2\sin^2\vartheta_0)}_{\frac{1}{2} M} (\dot\vartheta)^2 \qquad M = 2 m a^2 (1 + 2\sin^2\vartheta_0)$$

$$U = -ma^2(\Omega^2 \sin^2\vartheta + 2\Omega_0^2 \cos\vartheta) \qquad U''(\vartheta_0) = ?$$

$$U' = -ma^2(2\Omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - 2\Omega_0^2 \sin\vartheta)$$

$$\Omega = \Omega_0\text{-nál} \quad \cos\vartheta = \Omega_0^2/\Omega^2 \quad , \quad U'(\vartheta_0) = 0$$

(kisebb minimumhely)

$$U'' = -ma^2(-2\Omega^2 \sin^2\vartheta + 2\Omega^2\cos^2\vartheta - 2\Omega_0^2\cos\vartheta)$$

$$= -ma^2(-2\Omega^2 + 4\Omega^2\cos^2\vartheta - 2\Omega_0^2\cos\vartheta)$$

($\sin^2\vartheta \to 1 - \cos^2\vartheta$ helyettesítés)

behelyettesítve $\cos\vartheta_0 = \dfrac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$ -et:

$$U''(\vartheta_0) = -ma^2\left(-2\Omega^2 + 4\Omega^2\frac{\Omega_0^4}{\Omega^4} - 2\Omega_0^2\frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\right) =$$

$$= -ma^2\Omega^2\left(-2 + 2\frac{\Omega_0^4}{\Omega^4}\right) = ma^2\Omega^2(-2\Omega_0^4/\Omega^4 + 2)$$

$$M = 2(1 + 2\underset{\substack{\uparrow \\ 1-\cos^2\vartheta_0}}{\sin^2\vartheta_0})ma^2 = ma^2 2\left(3 - 2\frac{\Omega_0^4}{\Omega^4}\right)$$

$$D = ma^2\Omega^2\left(2\frac{\Omega_0^4}{\Omega^4} - 2\right)$$

$$\omega^2 = \frac{D}{M} = \Omega^2 \frac{-2\Omega_0^4/\Omega^4 + 2}{2(3 - 2\Omega_0^4/\Omega^4)} = \Omega^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}$$

Ha $\Omega \to \Omega_0$ $\quad \omega^2 \to 0$ $\quad (T \to \infty)$: bifurkáció előjele.

Miért hívják ezt centrifugál regulátornak?

Érdemes utánanézni.