1. Lissajous-görbe egyenlete

paraméteres megadás:

$$x = A \sin(\omega_1 t + \delta)$$

$$y = B \sin(\omega_2 t)$$

előállítás: hengerfelületre rajzolt görbe vetületeként

δ jelentése: milyen irányból vetítünk

tekintsük most az $\omega_2 = 2\omega_1$ és $\delta = 0$ esetet. Próbáljunk meg valamilyen összefüggést találni x és y között (t-t kiküszöbölve):

$$x = A \sin(\omega t) \rightarrow \sin(\omega t) = \frac{x}{A} \rightarrow \cos^2(\omega t) = 1 - \frac{x^2}{A^2}$$

$$y = B \sin(2\omega t) = 2B \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = 4B^2 \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) = 4B^2 \frac{x^2}{A^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

a görbe egyenlete:

$$\frac{y^2}{4B^2} - \frac{x^2}{A^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = 0$$

negyedrendű görbe.

Milyen paraméterértékek mellett kapunk parabolát?

2. Lissajous - görbe maximumai

mikor ér vissza ugyanoda?

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad x \text{ periódusa}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad y \text{ periódusa}$$

mindkettőnek egész számú periódusa: minimális n, m (rel. prímek)

$$T = n T_1 = m T_2 = n \frac{2\pi}{\omega_1} = m \frac{2\pi}{\omega_2}$$

ilyen létezik: csak akkor, ha

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}$$

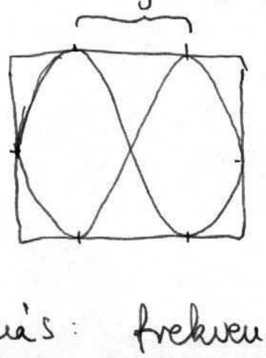
egy periódus alatt hányszor lesz x maximális?

$$\frac{T}{T_1} = n$$

ugyanígy y max.-ok száma $\frac{T}{T_2} = m$

az ábráról leolvasható tehát a két frekvencia aránya:

y max-ok száma $m = 2$



← x maxok száma $n = 1$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n} = 2$$

alkalmazás: frekvenciamérés oszcilloszkóppal.

3. Centrális erőtér – polárkoordináták bevezetése, effektív potenciál (radiális egyenlet)

mozgásegyenlet centrális erőtérben:

$$m\,\underline{\ddot{r}} = -V'(r)\,\frac{\underline{r}}{r}$$

Impulzusmomentum:

$$\underline{N} = \underline{r}\times\underline{p} = \underline{r}\times m\underline{\dot{r}} = m\,\underline{r}\times\underline{\dot{r}}$$

centrális erőtérben az impulzusmomentum megmarad:

$$\underline{\dot{N}} = \underbrace{m\underline{\dot{r}}\times\underline{\dot{r}}}_{0} + m\,\underline{r}\times\underline{\ddot{r}} \underset{\text{mozgásegy.}}{=} m\,\underline{r}\times\left(-V'(r)\,\frac{\underline{r}}{r}\right) =$$

$$= -V'(r)\,\frac{m}{r}\,\underbrace{(\underline{r}\times\underline{r})}_{0} = 0$$

A mozgás síkmozgás: a részecske benne marad az origón átmenő, $\underline{N}$-re merőleges síkban, ui.

$$\underline{r}\cdot\underline{N} = m\,\underline{r}\,(\underline{r}\times\underline{\dot{r}}) = 0 \qquad \text{és} \quad \underline{N} = \text{áll.}$$

Polárkoordináták bevezetése: síkbeli polárkoordináták

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

egységvektorok: $\underline{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ Descartes koord.-ban

$$\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Ekkor $\underline{r} = r\cdot\underline{e}_r$

Deriválás: összetett függvény deriválásával

$$\frac{d}{dt}\underline{e}_r = \underbrace{\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r}}_{0}\dot{r} + \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\underline{e}_\varphi = \underbrace{\frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial r}}_{0}\dot{r} + \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\cos\varphi \\ -\sin\varphi\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\,\underline{e}_r$$

Ezek felhasználásával:

$$\underline{r} = r\cdot\underline{e}_r$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\,\dot{\underline{e}}_r = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{r}\,\underline{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - r(\dot{\varphi})^2\,\underline{e}_r$$

Impulzusmomentum: csak a síkra merőleges (z) komponens

$$\underline{N} = N_z\cdot\underline{e}_z \qquad N_z = m r^2\dot{\varphi} \quad\rightarrow\quad \dot{\varphi} = \frac{N_z}{mr^2}$$

A mozgásegyenlet

$$m\ddot{\underline{r}} = m(\ddot{r}\,\underline{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - r(\dot{\varphi})^2\underline{e}_r) = -V'(r)\,\underline{e}_r$$

$\underline{e}_r$ irányú komponens (e_r-rel skalárisan szorozva):

$$m\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 = -V'(r)$$

$$r(\dot{\varphi})^2 = \frac{N_z^2}{m^2r^3}$$ (z indexet elhagyjuk innentől)

így

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{N^2}{m^2r^3} = -V_{eff}'(r) \qquad \boxed{V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2}}$$

Ezzel a centrális potenciálban való mozgás problémáját visszavezettük egy 1D problémára:

$$m\ddot{r} = -V_{eff}'(r) \qquad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

és egy integrálásra:

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2}$$

A mozgás energiája:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\underline{r}})^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{N^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Itt is az effektív potenciál jelent meg; az 1D mozgás energiája megegyezik az eredeti 3D mozgáséval.

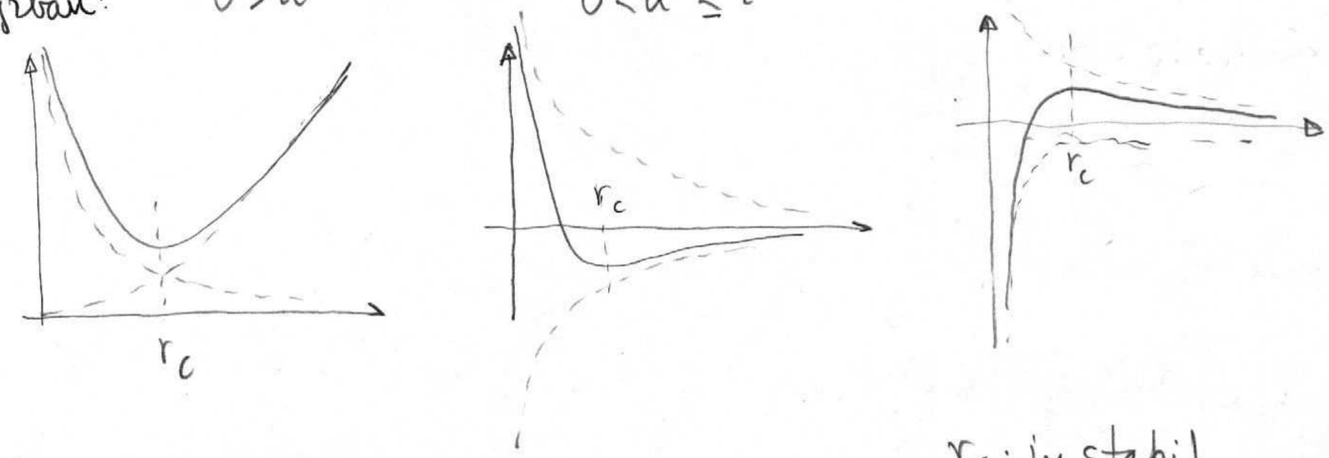
Körpálya: potenciál minimuma:

$$V_{eff}'(r_c) = 0$$

4. Hatványfv - potenciál

Legyen $V(r) = -\frac{\alpha m}{a r^a}$, ekkor $V_{eff}(r) = -\frac{\alpha m}{a r^a} + \frac{N^2}{2 m r^2}$

rajzban: $0 > a$ $\quad 0 < a \leq 2$ $\quad 2 \leq a$



r_c: stabil körpálya $\quad$ r_c: instabil körpálya

r_c: körpálya sugara. Meghatározása: az $\ddot{r} = -\frac{1}{m} V_{eff}'(r)$ radiális egyenlet nyugalmi helyzete:

$$V_{eff}'(r_c) = 0$$

$$V_{eff}'(r_c) = \frac{\alpha m}{r_c^{a+1}} - \frac{N^2}{m r_c^3} \rightarrow \alpha m^2 r_c^3 = N^2 r_c^{a+1}$$

$$r_c = \left(\frac{\alpha m^2}{N^2}\right)^{1/a-2}$$

Kicsit excentrikus pályák: körpálya körüli kis rezgések.

körpálya körüli kis rezgések frekvenciája:

$$m\ddot{r} = -V_{eff}'(r) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{V_{eff}''(r_c)}{m}$$

alakítsuk ezt át!

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

$$V_{eff}'(r) = V'(r) - \frac{N^2}{mr^3}$$

$$V_{eff}''(r) = V''(r) + 3\frac{N^2}{mr^4}$$

a második egyenletből, r_c-nél (eff. pot. minimuma)

$$\frac{N^2}{mr_c^3} = V'(r_c) \Rightarrow \frac{N^2}{mr_c^4} = \frac{V'(r_c)}{r_c}$$

$$m\omega^2 = V_{eff}''(r_c) = V''(r_c) + 3\frac{V'(r_c)}{r_c}$$

ezen pályák záródásához az kell, hogy ω és a körpálya szögsebessége, $\dot{\varphi} = \frac{N}{mr_c^2} = \sqrt{\frac{N^2}{m^2r_c^4}} = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}}$ hányadosa racionális legyen. Ez a hányados:

$$\frac{\omega}{\dot{\varphi}} = \sqrt{\frac{r_c V''(r_c) + 3V'(r_c)}{V'(r_c)}} = \sqrt{2-a}$$

V konkrét alakját behelyettesítve; pl $a = +1$

$a = -2$

Záródik-e minden olyan esetben a pálya, ha $\sqrt{2}$-a racionális?

Nem!

- levezetjük $r(\varphi)$-t, abban vizsgáljuk a rezgéseket

- ott megkérjük, hogy ne adódjanak a rezgés periódusához korrekciók

5. $u = \frac{1}{r}$ változótranszformáció, pályaegyenlet

$$r(t) = r(\varphi(t)) \qquad \dot{r}(t) = r'(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)$$

ezt beírjuk az energiakifejezésbe; előtte még egy változótrf:

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} \qquad u'(\varphi) = -\frac{1}{r^2(\varphi)}\,r'(\varphi) = -u^2 r' \qquad r' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{N^2}{2mr^2} + V(r) = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{u'}{u^2}\right)^2(\dot{\varphi})^2}_{\underbrace{m r^4}\,(u')^2\,\underbrace{(\dot{\varphi})^2}\;\to\;\frac{N^2}{m}(u')^2} + \frac{N^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$u'' = -v'(u)$$

$$E = \frac{N^2}{m}\left\{\frac{(u')^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{m}{N^2}V\left(\frac{1}{u}\right)\right\}$$

legyen $v(u) = \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{m}{N^2}V\left(\dfrac{1}{u}\right)$

$u_c = \dfrac{1}{r_c}$ itt is egyensúly

$$\boxed{\text{EDDIG ÁLTALÁNOS! } V(r) \text{ TETSZ. CENTRÁLIS POT.}}$$

záródó pálya feltétele: ebben a rezgés frekvenciája racionális

Alkalmazás: hatványfüggvény-potenciál.

$v''(u_c) = 2 - a$

magasabbrendű korrekciók: múltkori gyakorlat, (nemlin.)

anharmonikus oszcillátor rezgései: az akkori számolást

kellene úgy megismételni, hogy van a potenciálban

köbös és negyedikenes tag is.

Most csak az eredményt írjuk fel:

$$\omega_2 \sim (a-1)(a+2)$$

azaz, csak az $\frac{1}{r}$-es és az r^2-es potenciálban

záródhatnak a pályák.

Fontos: ez is közelítés, akkor, hogy tudjuk,

hogy ezekben záródnak, meg kell nézni a megoldásokat

- $\frac{1}{r}$-es potenciál: Kepler-probléma,

  ellipszisek

- r^2-es potenciál: 2D oszcillátor, szintén

  ellipszisek, de az origó a középpontban

  van, nem a fókuszban.

6. Runge - Lenz - vektor   a Kepler - probléma megmaradó mennyisége

$$V(\underline{r}) = -\frac{\alpha m}{r}$$

$$\underline{L} = \dot{\underline{r}} \times \underline{N} - \alpha m \underline{e}_r$$ a Runge - Lenz - vektor

ez megmaradó mennyiség:

$$\dot{\underline{L}} = \ddot{\underline{r}} \times \underline{N} + m\dot{\underline{r}} \times \underbrace{\dot{\underline{N}}}_{\text{ez } 0} - \alpha m \dot{\underline{e}}_r$$

$$\ddot{\underline{r}} = -\frac{1}{m} V'(r) \underline{e}_r \qquad \underline{N} = m r^2 \dot{\varphi} \underline{e}_z$$

$$\underline{e}_r \times \underline{e}_z = -\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \qquad V'(r) = \frac{\alpha m}{r^2}$$

így

$$\dot{\underline{L}} = m\left(-\frac{1}{m}\frac{\alpha}{r^2} \overbrace{e_r\right) \times m r^2 \dot{\varphi} e_z}^{-\underline{e}_\varphi} - \alpha m \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$= 0$$

Hova mutat ez a vektor?

$\underline{L}$ állandó, kiszámolhatjuk akkor, amikor a részecske perihéliumban van: Ekkor

$$\dot{\underline{r}} = v_{max} \underline{e}_\varphi \qquad v_{max} = \frac{N}{m r_{min}}$$

$$\underline{L} = (v_{max} N - \alpha m) e_r = \alpha m \varepsilon e_r$$

perihéliumban a Runge - Lenz - vektor nagysága:

$$L = v_{max} N - m\alpha$$

$$v_{max} = \frac{N}{m r_{min}} \qquad r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$$

$$N = b\sqrt{2m|E|}$$

így $v_{max} N = \dfrac{N^2}{m r_{min}} = \dfrac{b^2\, 2m|E|}{m} \dfrac{1+\varepsilon}{p}$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$v_{max} N = 2|E| b^2 \frac{1+\varepsilon}{p} = 2|E| \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} \frac{1+\varepsilon}{p} = 2|E| \frac{p}{1-\varepsilon}$$

$$\frac{p}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon)$$

$$v_{max} N = 2|E| a (1+\varepsilon)$$

mert $a = \dfrac{p}{1-\varepsilon^2}$ de $a = \dfrac{\alpha m}{2|E|}$

így $v_{max} N = \alpha m (1+\varepsilon)$

$$L = v_{max} N - m\alpha = m\alpha(1+\varepsilon) - m\alpha = m\alpha\varepsilon$$

$\underline{L}$ a perihélium felé mutat, nagysága $m\alpha\varepsilon$

7. $1/r^4$ -es potenciál

$$V(r) = -\frac{\alpha m}{4r^4}$$

$u = \frac{1}{r}$ egyenlete $\quad v(u) = \frac{u^2}{2} + \frac{m}{M^2} V\left(\frac{1}{u}\right)$

$$u'' = -v'(u)$$

$$u'' = -u + \beta u^3 \qquad v(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{\beta}{4} u^4$$

$$v(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{\beta}{4} u^4 = -\frac{\beta}{4}(u^2 - u_0^2)^2 - \frac{\beta}{4} u_0^4$$

instabil körpálya: $\quad v(u)$ maximuma

$u = u_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ -nál $\qquad \tilde{E} = v(u_0) = -\frac{\beta}{4} u_0^4$

pályaegyenlet megoldása:

$$u'(\varphi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(\tilde{E} - v(u))}}$$

ahonnan

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{2(\tilde{E} - v(u))}} = \int \frac{du}{\frac{\beta}{4}(u^2 - u_0^2)} = \frac{4}{\beta} \int \frac{du}{u^2 - u_0^2}$$

$u > u_0$: belső pálya, + előjel: φ-vel növekvő megoldás

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{4}{\beta u_0} \operatorname{arcth} \frac{u}{u_0}$$

azaz
$$\varphi-\varphi_0 = \frac{4}{\sqrt{\beta}}\ \mathrm{arcth}\,\frac{u}{\sqrt{\beta}}$$

$$u = \sqrt{\beta}\ \mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{4}(\varphi-\varphi_0)\right)$$

$\frac{\sqrt{\beta}}{4}(\varphi-\varphi_0) > 1$ -re

$u>0$ így ez csak ~~[illegible]~~ arra érvényes

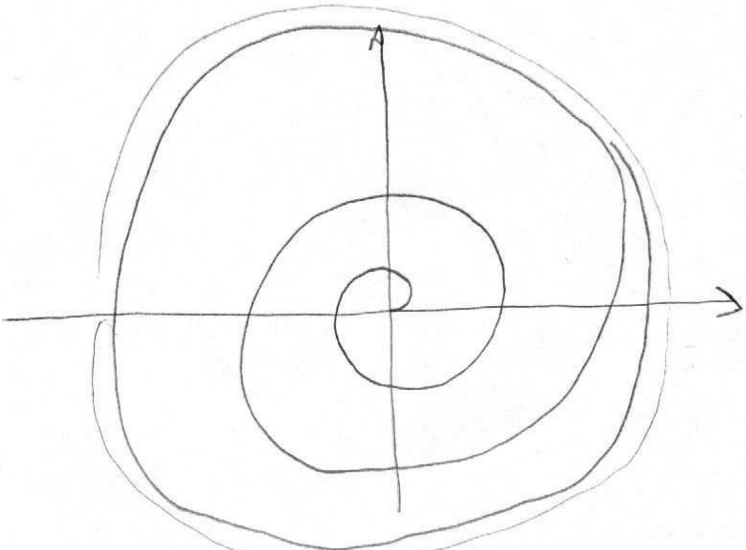
Többi megoldás: az egyenlet $u \to -u$ -ra szimmetrikus,

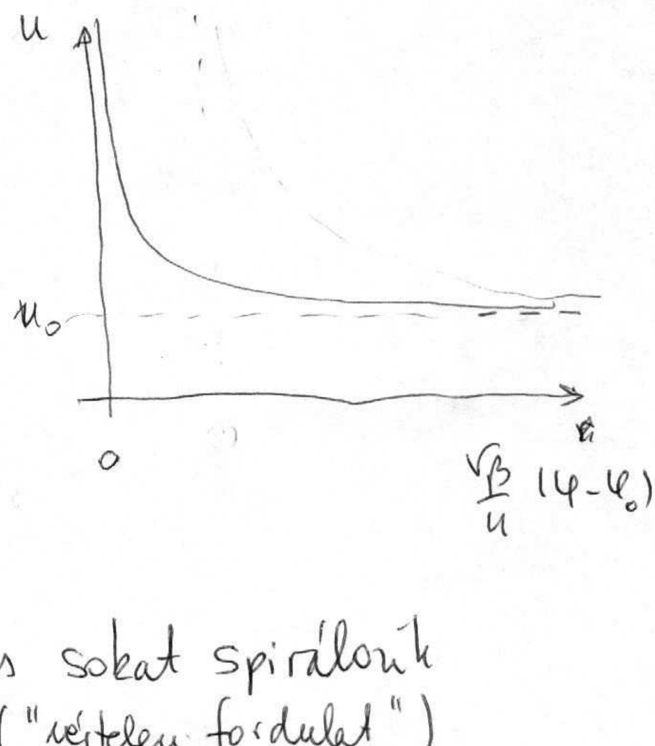
így $\quad u = -\sqrt{\beta}\ \mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{4}(\varphi-\varphi_0)\right)$

(a másik limeszben értelmes)

Az első megoldás rajzban: $\frac{\sqrt{\beta}}{4}(\varphi-\varphi_0)=0$-nál $u=\infty$, $r=0$

utána u csökken, r nő:





– az origó körül véges sokat spirálozik
– $u=u_0$-ra rásimul ("végtelen fordulat")
– időben megfordítva: "bespirálozik"