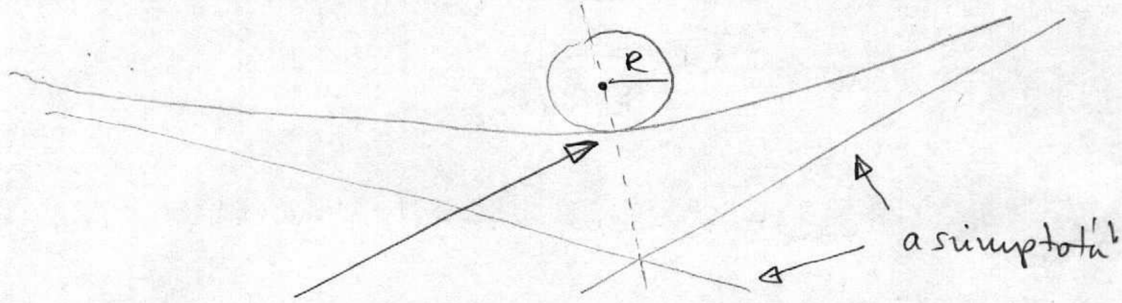
1. Bolygó / csillag teljes becsapódási hatáskeresztmetszete

Egy üstökös a végtelenből v_0 sebességgel halad egy csillag felé, úgy, hogy ha nem lenne gravitáció, akkor az égitest mellett b távolságra haladna el. Mekkora b, ha épp becsapódik?

v_0: kezdősebesség → energia $E = \frac{1}{2} m v_0^2$

b: ütközési paraméter

ha a csillag pontszerű lenne, hiperbolapályán haladna:



perihéliumban
van a legközelebb → itt fog becsapódni

Mozgásállandók:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}$$ energia

$$N = m r^2 \dot{\varphi}$$ impulzusmomentum

a végtelenben $E = \frac{1}{2} m v_0^2$ $\quad N = m b v_0$

perihélium: $r = r_{min}$ minimum $\Rightarrow \dot{r} = 0$ perihéliumban

így itt $E = \frac{1}{2} m r_{min}^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r_{min}}$ $\qquad \dot{\varphi} = \frac{N}{m r^2} = \frac{m b v_0}{m r^2}$ -et behelyettesítünk

$$E = \frac{N^2}{2m r_{min}^2} - \frac{\alpha}{r_{min}} = \frac{m b^2 v_0^2}{2 r_{min}^2} - \frac{\alpha}{r_{min}}$$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = E$ - t kiemelve

$$E = E\left(\frac{b^2}{r_{min}^2} - \frac{\alpha}{E r_{min}}\right)$$

azaz

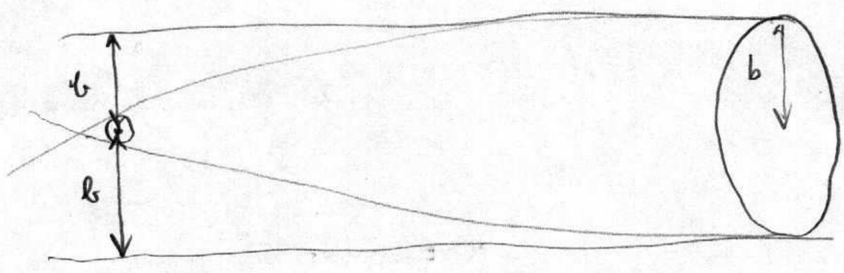
$$\frac{b^2}{r_{min}^2} - \frac{\alpha}{E r_{min}} = 1$$

$$b = r_{min}\sqrt{1 + \frac{\alpha}{E r_{min}}}$$

épp beleütközik, ha $r_{min} = R =$ az égitest sugara

$$b = R\sqrt{1 + \frac{\alpha}{RE}}$$

teljes hatáskeresztmetszet: az a végtelenbeli felület, amin áthaladó (E energiájú) részecskék beleütköznek:



$$\sigma = \sigma(E) = \pi b^2 = \pi R^2\left(1 + \frac{\alpha}{RE}\right)$$

energiafüggő!

2. A háromtestprobléma alapjai

$$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) = -\gamma\left(\frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|} + \frac{m_2 m_3}{|\underline{r}_2-\underline{r}_3|} + \frac{m_3 m_1}{|\underline{r}_3-\underline{r}_1|}\right)$$

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\nabla_i U \qquad (i=1,\dots,N=3)$$

változók száma: $\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i \rightarrow$ a fázistér 18 dimenziós

megmaradó mennyiségek (mozgásállandók):

impulzus: $\underline{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i = m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2 + m_3 \dot{\underline{r}}_3$

$$\underline{r}_0 - \frac{\underline{p}}{m} t = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} - \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} t$$

impulzusmomentum:

$$\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i$$

energia

$$\underline{E} = K + V \qquad K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{\underline{r}}_i)^2$$

összesen a megmaradó mennyiségek (komponenseinek) száma:

$\underline{p}$	$\underline{r}_0 - \frac{\underline{p}}{m} t$	$\underline{N}$	E	összesen
3	3	3	1	10

a mozgásállandók segítségével az egyenletrendszert redukálva is 8 változó marad $\rightarrow$ nem tudjuk megoldani

kéttestprobléma: 12 változó, 10 mozgásállandó
$\rightarrow$ redukció 2-re, ~ 1D mozgás $\rightarrow$ megoldható

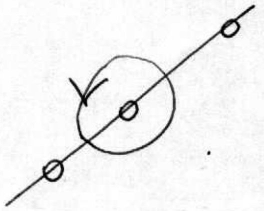
Ha általánosan nem is tudjuk megoldani, speciális megoldások azért ismertek:

Euler: a 3 tömegpont mindig 1 egyenesbe esik

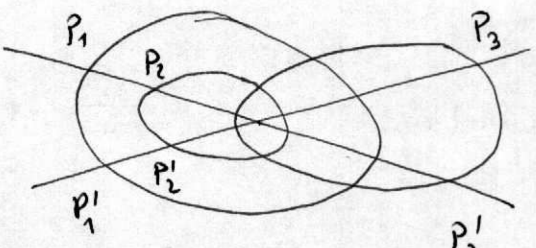
Lagrange: a tömegpontok közötti távolságok aránya állandó

(az Euler-megp. is ilyen)

ilyen mego-kat kerestek

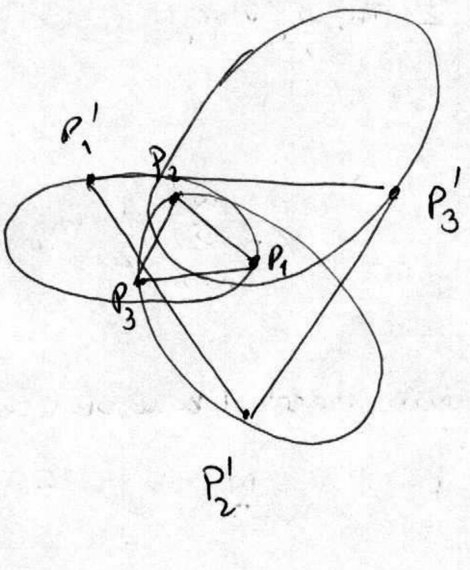


Euler: forgó egyenes mentén



Lagrange

Lagrange: forgó, változó méretű szabályos háromszög



a rendszer TKP-jához és egymáshoz képest is hasonló kúpszelet-pályákon mozognak

(részletesen: Érdi Bálint: Égimechanika c. jegyzetében)

Korlátozott háromtestprobléma

a harmadik test tömege elhanyagolható az első kettőéhez képest:

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} \frac{\underline{r}_{13}}{r_{13}}$$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}^2} \frac{\underline{r}_{23}}{r_{23}} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \frac{\underline{r}_{21}}{r_{21}}$$

$\underline{r}_{ik} = \underline{r}_i - \underline{r}_k$

$r_{ik} = |\underline{r}_{ik}|$

$$m_3 \ddot{\underline{r}}_3 = -\gamma \frac{m_1 m_3}{r_{31}^2} \frac{\underline{r}_{31}}{r_{31}} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{32}^2} \frac{\underline{r}_{32}}{r_{32}}$$

az egyenleteket elosztjuk m_i-vel

itt már világos az $m_3 \to 0$ határeset:

$$\ddot{\underline{r}}_1 = -\gamma \frac{m_2}{r_{12}^2} \frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}} - \gamma \frac{m_3}{r_{13}^2} \frac{\underline{r}_{13}}{r_{13}}$$

ezek a tagok elhagyhatók

$$\ddot{r}_2 = -\gamma \frac{m_1}{r_{21}^2} \frac{\underline{r}_{21}}{r_{21}} - \gamma \frac{m_3}{r_{23}^2} \frac{\underline{r}_{23}}{r_{23}}$$

$$\ddot{r}_3 = -\gamma \frac{m_1}{r_{31}^2} \frac{\underline{r}_{31}}{r_{31}} - \gamma \frac{m_2}{r_{32}^2} \frac{\underline{r}_{32}}{r_{32}}$$

ebben az esetben az egyenletek szétcsatolódnak. $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ egyenlete egy kéttestprobléma (ez külön megoldható), az m_3 tömeg az m_1, m_2 tömegek által meghatározott gravitációs térben mozog;

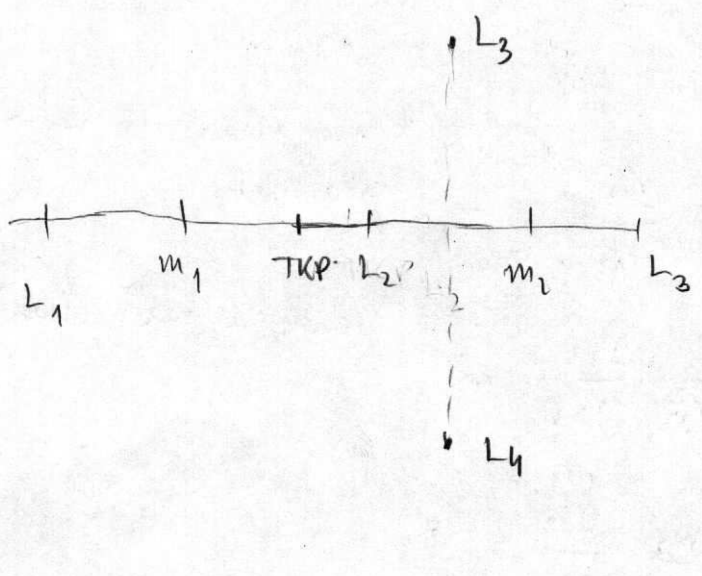
Bizonyos speciális eseteket érdemes megvizsgálni:

mozogjon m_1, m_2 körpályán. Leírás: tömegközépponti koordinátarendszerben.

$$\underline{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\underline{r} \qquad \underline{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\underline{r}$$

$$\underline{r} = r\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}$$

megmutathatjuk, hogy $\underline{r}_3$-at is hasonló alakban keresve ($r_3\begin{pmatrix}\cos(\omega t+\alpha)\\ \sin(\omega t+\alpha)\end{pmatrix}$

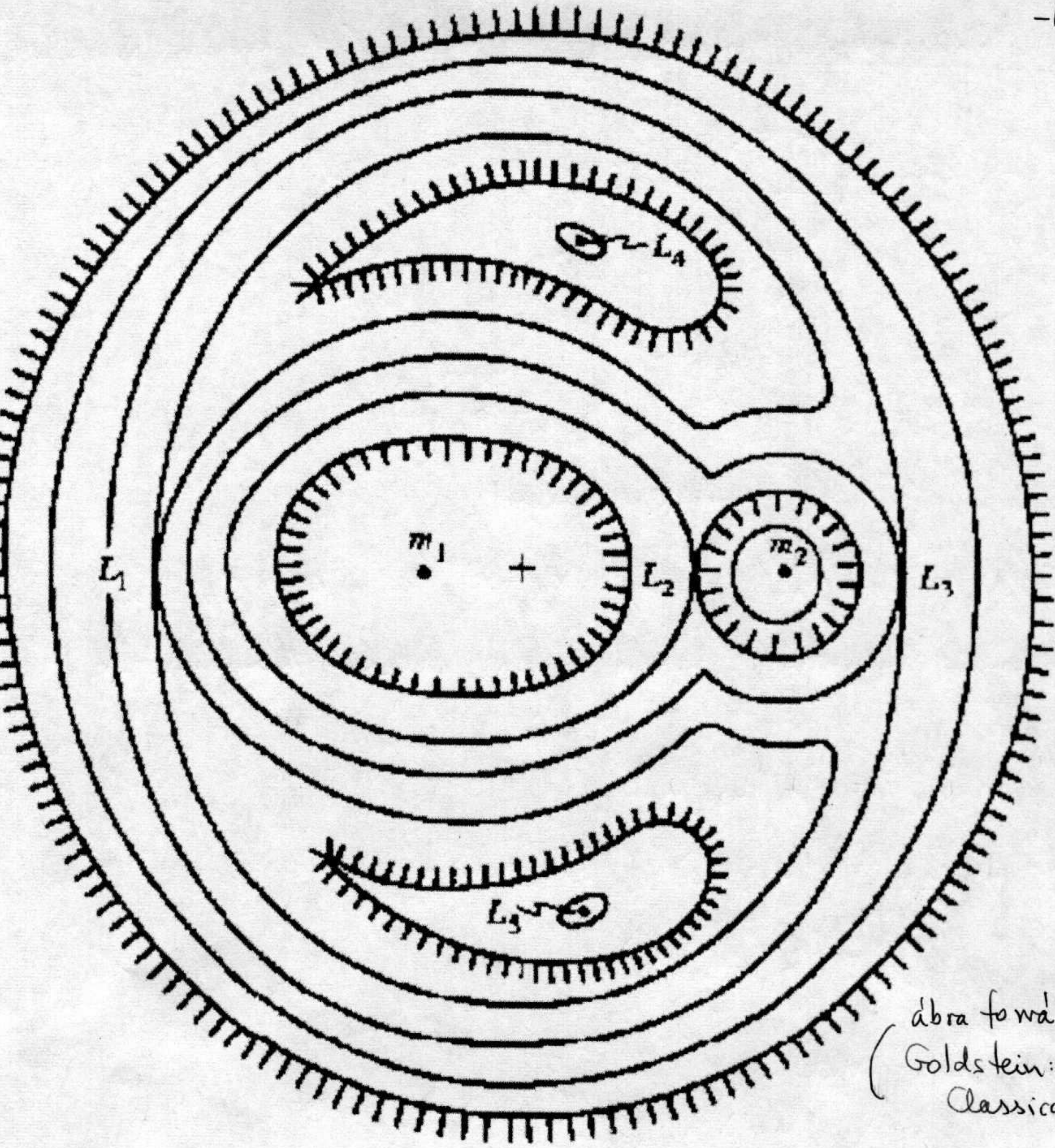


vannak olyan pontok, ahol ez megoldás

L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 Lagrange-pontok

instabil stabil

- stabilitás vizsgálata: kis rezgések, erő formula linearizálása
- ezek elliptikus pályák esetén is léteznek
- alkalmazás: műholdak pályái (Naptól, Földtől elég messze, h. zavarok ne érjék, de azért fix pálya)
  - L_2: SOHO Nap-obszervatórium (instabil pont! hajtóművel stabilizálja magát) — Nap-Föld
  - L_4, L_5: STEREO A, B — Nap-Föld
- feltételezés: Föld-Hold rsz. L_4, L_5: Kordylewsky-porholdak
- Nap-Jupiter rsz L_4, L_5: Trójai-kisbolygók



ábra forrás:
(Goldstein:
Classical Mechanics)

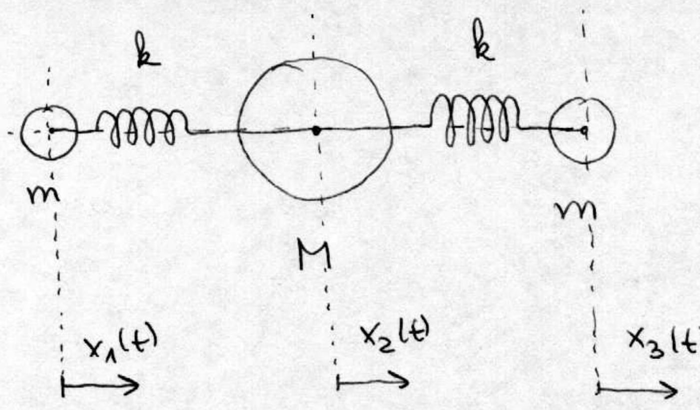
a korlátozott háromtestprobléma ekvipotenciál - görbéi

inerciaerők figyelembevétele nélkül

$$
\left.\begin{aligned}
&-m\underline{A} \\
&-m\,\underline{\omega}\times(\omega\times\underline{r}) \\
&-2m\,(\underline{\omega}\times\underline{v}) \\
&-m\,(\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r})
\end{aligned}\right\} \text{ még kellene}
$$

3. Egy rugós-golyós rendszer sajátrezgései (pl. lineáris molekula)

"CO_2 molekula"



felírjuk a 3 test mozgásegyenletét

$$u_1 = x_1 - x_1^{es.} \qquad u_2 = x_2 - x_2^{es.} \qquad u_3 = x_3 - x_3^{es}$$

egyensúlyi helyzethez képest mért relatív koordináták

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1)$$

$$M\ddot{u}_2 = k(u_1 - u_2) + k(u_3 - u_2)$$

$$m\ddot{u}_3 = k(u_2 - u_3)$$

mátrixalakba írjuk:

$$\begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

bevezetve $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$-et és $c = \frac{m}{M}$-et, az $\begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix}$

mátrix inverzével beszorozva:

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ c & -2c & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{-\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

vektoriális alakban

$$\underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2 \, \underline{\underline{A}} \, \underline{u}$$

keressük a differenciálegyenlet megoldását

$$\underline{u}(t) = \underline{a}\, e^{i\omega t} \qquad \text{alakban !}$$

ekkor $\quad \dot{\underline{u}}(t) = i\omega\, \underline{a}\, e^{i\omega t}$

$$\ddot{\underline{u}}(t) = -\omega^2\, \underline{a}\, e^{i\omega t}$$

az $\ddot{\underline{u}} = \omega_0^2\, \underline{\underline{A}}\, \underline{u}$ egyenletből így

$$-\omega^2\, \underline{a}\, e^{i\omega t} = \omega_0^2\, \underline{\underline{A}}\, \underline{a}\, e^{i\omega t}$$

adódik, ezt egy oldalra rendezve, $e^{-i\omega t}$ -vel beszorozva:

$$\left(\omega_0^2\, \underline{\underline{A}} - \omega^2\right) \underline{a} = 0$$

$$\Big(\underline{\underline{A}} - \underbrace{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}_{\lambda}\Big)\, \underline{a} = 0$$

ez nem más, mint az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékproblémája

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

karakterisztikus egyenlet: $\quad \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = 0$

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -c & 2c-\lambda & -c \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} (1-\lambda) & -1 \\ -c & 2c-\lambda \\ 0 & 2c-\lambda \end{matrix}$$

det: $\oplus \searrow\searrow\searrow \quad \ominus \swarrow\swarrow\swarrow$ $\qquad$ (Sarrus - szabály)

$$(1-\lambda)(2c-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda)(-c)(-1) - (-1)(-c)(1-\lambda)$$

minden tagban van $(1-\lambda)$! Emeljünk ki

$$\det(A-\lambda \underline{\underline{I}}) = (1-\lambda)\left[(2c-\lambda)(1-\lambda) - c - c\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[2\cancel{c} - 2c\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2\cancel{c}\right]$$

$$= (1-\lambda)\,\lambda\,(\lambda - 1 - 2c)$$

a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 0 \qquad\qquad \omega_1^2 = 0$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad\qquad \omega_2^2 = \omega_0^2$$

$$\lambda_3 = 2c+1 \qquad\qquad \omega_3^2 = \omega_0^2\,(2c+1)$$

sajátvektorok

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda = 0$$

első sor: $u_1 = u_2$

~~má~~ harmadik: $u_2 = u_3$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de mit jelent $\omega_1^2 = 0$ Ha $\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$ & $\ddot{f}(t) = 0$

akkor megoldás $\rightarrow$ $f(t) = x_0 + v t$ tömegközéppont egyenletes mozgása (csak belső erők vannak!)

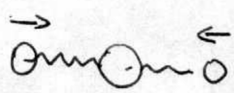
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -c & 2c-1 & -c \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda = 1$$

első sor: $u_2 = 0$

második sor: $u_1 = -u_3$

harmadik sor: ✓

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -2c & -1 & 0 \\ -c & -1 & -c \\ 0 & -1 & -2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

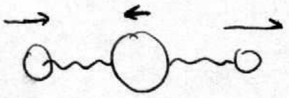
$2cu_1 + u_2 = 0$

$-cu_1 - u_2 - cu_3 = 0$

$u_2 + 2cu_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} -u_2 &= 2cu_1 \quad \text{első} \\ -u_2 &= 2cu_3 \quad \text{harmadik} \end{aligned}\right\} u_1 = u_3$$

második $\quad 2cu_1 + u_2 = 0 \quad\quad u_2 = -2cu_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2c \\ 1 \end{pmatrix}$



Megkaptuk a három módust.

Fontos észrevétel: ha van a rendszernek egy folytonos szimmetriája (pl. tetsz. a-val el lehet tolni, több dim. rsz-nél tetsz. φ-vel el lehet forgatni, stb) akkor a szimmetria alkalmazásával kapott vektor sajátvektor 0 sajátértékkel;

itt a-val való eltolás: $\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ - t ad.

MINDEN FTLEN SZIMMETRIÁHOZ

TARTOZIK EGY ZÉRÓMÓDUS.