Mechanika gyakorlat, numerikus feladatok

Nemes Frigyes, Lukács Árpád

2009. november 27.

Tudnivalók: A feladatok megoldása beadható `C`, `C++`, `Octave/Matlab`, `Fortran` vagy bármely egyéb olyan programnyelven, melyet egy átlagos Linuxos gépen könnyen futásra lehet bírni. A feladatok megoldása adott esetben elég sok időt vehet igénybe; egy–két feladat megoldása már szép eredmény. Példaprogramok találhatók a gyakorlat honlapján: `www.rmki.kfki.hu/~arpi/mech/`.

1. Feladat (10p)**.** Határozzuk meg azokat a kezdőfeltételeket, melyekkel a sebesség négyzetével arányos, $\mathbf{F}_s = -\alpha|\mathbf{v}|\mathbf{v}$, súrlódási erő és gravitáció ($\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$) hatása alatt álló test egy megadott (a program futása során megadható) koordinátájú célpontot eltalál (célbalövés)!

2. Feladat (10p)**.** Írjunk programot az $V(x) = m\alpha(1 + \beta x^2)\cos(x/a)$ $(\alpha, \beta, a > 0)$ potenciálban mozgó részecske fázistérbeli trajektóriáinak számolására!

3. Feladat (11p)**.** Szimuláljuk N darab, egymást gravitációsan vonzó, m_i $(i = 1 \dots N)$ test mozgását! (Elegendően gyors gépen lehessen N akár 10^3 nagyságrendű!)

4. Feladat (10p)**.** Írjunk billiárd-szimulátort (a golyók pályáit elég számoszlopokkal megadni, grafikus megjelenítés nem szükséges)!

5. Feladat (12p)**.** Írjunk programot centrális potenciálban mozgó részecske mozgásának szimulációjára. A sugár minimumainak keresésével határozzuk meg a perihéliumokhoz tartozó szöget! (Példa: $V(r) = -\alpha m r^{-\alpha}$, vagy $V(r) = -\alpha/r + \beta/r^3$.)

6. Feladat (15p)**.** Sekély víz nehézségi hullámainak terjedését (a változók megfelelő átskálázása után) az $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ Korteweg–deVries-egyenlet írja le (indexekkel az indexbe írt változó szerinti parciális deriváltat jelöljük). (a) Ellenőrizzük, hogy $\xi = x - c_0 t$ bevezetésével,

$$u = \frac{c_0}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0)\right)}$$

megoldja az egyenletet! (A megoldás egy állandó alakú, alakját megtartva tovaterjedő hullám, *szoliton*.) (b) Írjunk olyan programot, mely egy alkalmasan megadott hullámcsomag (a program számára ez bemenet, pl. adott pontokon megadott értékekkel) időbeli fejlődését szimulálja. (Ezzel vizsgálható pl. a fenti szoliton terjedése, vagy, hogy kialakul-e adott kezdő hullámalakból egy szoliton.)

7. Feladat (12p)**.** Írjunk programot a kettősinga mozgásának szimulációjára! Keressük meg a numerikus megoldásban az előadáson kiszámolt kis rezgéseket, vizsgáljuk meg, hogy megegyeznek-e a frekvenciák az elméletben kiszámoltakkal!

8. Feladat (10p). Írjunk programot az $\mathbf{F}_s = -\alpha|\mathbf{v}|\mathbf{v}$, sebesség négyzetével arányos csillapítású oszcillátor ($\ddot{x} + \alpha|\dot{x}|\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$) fázistérbeli trajektóriáinak meghatározására.

9. Feladat (13p). Határozzuk meg a következő rendszer legalacsonyabb energiájú állapotát: egy L oldalhosszúságú négyzet alakú rögzített keret belsejébe egy $N \times N$-es négyzetrácsot építünk az éleken k rugóállandójú rugókkal, a rácspontokban m tömegű nehezékekkel. A keret vízszintes, a nehezékekre a gravitációs erő hat. A program kimenete legyen az egyes nehezékek függőleges kitérése.

10. Feladat (14p). Tekintsük az előző feladatban megadott, de gravitáció nélküli rendszert. Szimuláljuk a rendszer rezgéseit!

11. Feladat (12p). Legyen adott R sugarú, kör keresztmetszetű cső. A cső egyik vége a tengelyre merőlegesen egyenesre vágott, a másik vég viszont nem egyenes, hanem a hossz egy $z(\varphi)$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ függvénnyel adott. A csövet szappanos vízbe mártva a végén egy szappanhártya marad (minimális felület). Határozzuk meg ennek a felületnek az alakját.

12. Feladat (11p). Írjunk programot a tricikli mozgásának szimulációjára! Legyen a tricikli tömege m, a kormány állása valamilyen adott $\vartheta(t)$ függvény, és a triciklire az eleje irányában hasson $F(t)$ erő.
Segítség: a tricikli hátsó tengelye merev, a végén a két kerék függetlenül forog, az első kerék pedig adott szögben elfordítható egy függőleges tengely körül (kormányzás).

13. Feladat (10p). Tekintsünk egy oszcillátort, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, melynek frekvenciája az időtől periodikusan függ: $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \Omega t)$. Írjunk programot az oszcillátor mozgásának a szimulációjára!