A zárthelyi feladatainak a megoldása

1a) $$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin^2(\Omega t)$$

trigonometriai átalakítás:

$$\cos(2\Omega t) = \cos^2(\Omega t) - \sin^2(\Omega t)$$
$$= (1 - \sin^2(\Omega t)) - \sin^2(\Omega t)$$
$$= 1 - 2\sin^2(\Omega t)$$

ahonnan $\sin^2(\Omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\Omega t))$

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{2m}(1 - \cos(2\Omega t))$$

két tag összegére bontva: $x(t) = x_0(t) + x_2(t)$

$$\ddot{x}_0 + \alpha \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = \frac{F_0}{2m}$$

$$\ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\frac{F_0}{2m} \cos(2\Omega t)$$

mindkettő harmonikusan / áll. erővel gerj. rezgés

$$x_0 = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} = \frac{F_0}{2k}$$ $k = m\omega_0^2$ rugóáll.

$$x_2 = A\cos(2\Omega t - \varphi)$$ kényszerrezgés

$$A = \frac{-F_0/(2m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2 + \alpha^2 4\Omega^2}} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\alpha 2\Omega}{\omega_0^2 - 4\Omega^2}$$

1b.)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad f(t) = \frac{F(t)}{m} = \begin{cases} f_0 \sin^2(\Omega t) & 0 < t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

a megoldást most az alulcsillapított esetre írjuk fel
(a többi eset teljesen hasonló)

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} e^{-\alpha/2} \sin(\omega t)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - (\alpha/2)^2$$

1.) $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t')\, dt' = \int_0^{\infty} G(t-t') f(t')\, dt'$$

mert $f(t') = 0$ ha $t' < 0$

ha $t < 0$

$t - t' < 0$ a teljes int. tartományban, így $G(t-t') = 0$

$$\boxed{x(t) = 0 \quad \text{ha } t < 0}$$

2.) $0 < t < T = \frac{2\pi}{\Omega}$ -ra:

$G(t-t') \neq 0$ ha $t' < T$, t'-ig integrálunk

$f(t) = f_0 \sin^2(\Omega t)$

3.) $t > T$ esetén $f(t) \neq 0$ csak ha $t' < T$, T-ig integrálunk

$$\sin^2(\Omega t) = \left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right)^2 = \frac{1}{4}\left(-e^{-2i\Omega t} - e^{2i\Omega t} + 2\right)$$

$t>0$-ra

$$G(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

az integrandus:

$$G(t-t')f(t') = \frac{1}{2i\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')}\left(e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{4}\left(2 - e^{-2i\Omega t} - e^{-2i\Omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{8i\omega} \sum_{k=1}^{6} a_k e^{\lambda_k t'}$$

$$a_1 = 2e^{-\frac{\alpha}{2}t} e^{i\omega t}$$

$$\lambda_1 = -i\omega + \frac{\alpha}{2}$$

$$a_2 = -e^{-\frac{\alpha}{2}t} e^{i\omega t}$$

$$\lambda_2 = -i\omega + \frac{\alpha}{2} - 2i\Omega$$

$$a_3 = -e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{i\omega t}$$

$$\lambda_3 = -i\omega + \frac{\alpha}{2} + 2i\Omega$$

$$a_4 = -2e^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-i\omega t}$$

$$\lambda_4 = i\omega + \frac{\alpha}{2}$$

$$a_5 = e^{-i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\omega t}$$

$$\lambda_5 = i\omega + \frac{\alpha}{2} - 2i\Omega$$

$$a_6 = e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\omega t}$$

$$\lambda_6 = i\omega + \frac{\alpha}{2} + 2i\Omega$$

ahonnan $0 < t < T$ esetén

$$x(t) = \frac{1}{8i\omega}\left[\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{\lambda_k} e^{\lambda_k t'}\right]_{t'=0}^{t'=t}$$

és $t>T$-re

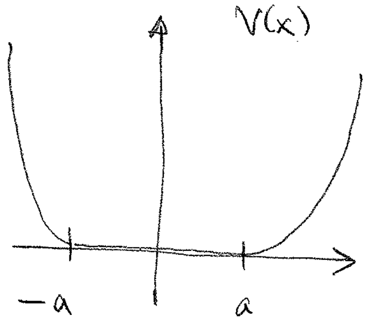
$$x(t) = \frac{1}{8i\omega}\left[\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{\lambda_k} e^{\lambda_k t'}\right]_{t'=0}^{t'=T}$$

lehet egyszerűsíteni, ha valaki emlékszik a gyakorlatból az $f(t) = \begin{cases} f_0 & 0<t<T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ esetre,

és az egyetlen szinuszhullám esetére. (Harmadik gyakorlat, ill. Landau)

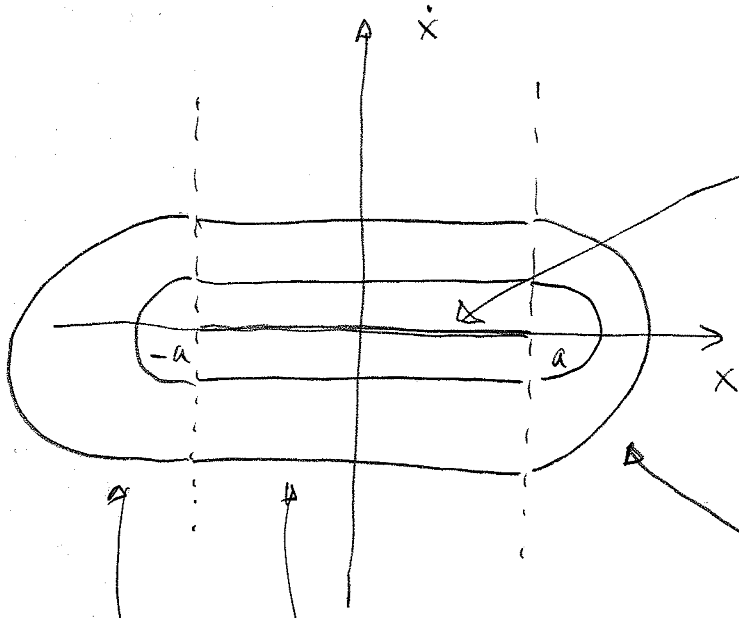
2.

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{2}(x+a)^2 & x<-a \\ 0 & -a<x<a \\ \frac{\omega^2}{2}(x-a)^2 & x>a \end{cases}$$



Fázistérbeli trajektóriák:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$



a $[-a,a]$ szakasz összes pontja egyensúly

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}(x-a)^2 = E = \text{áll.}$$

ellipszisek jobb fele

(ell. középpontja: $x=a$, $y=0$)

egyenes szakaszok

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}(x+a)^2 = E = \text{áll.}$$

ellipszisek bal fele

(ellipszis középpontja $x=-a$, $y=0$)

periódusidő meghatározása:

$|x| < a$:

$$\frac{1}{2} m v^2 = E \qquad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$ -mel, periódusonként

$4a$ utat tesz meg

$$\rightarrow \quad T_1 = \frac{4a}{v} = 4a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

$|x| > a$: harmonikus rezgés darabja

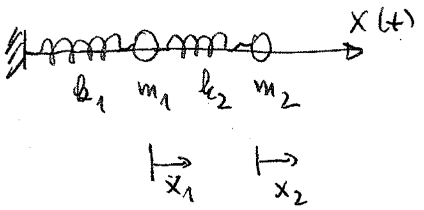
$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega}$$ periódusidővel

$\Rightarrow$ teljes periódusidő

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2\pi}{\omega} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

a rezgés amplitúdója sosem kicsi, az egyensúlyok egyike sem stabil.

3.



$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1)$$

azaz

$$\begin{pmatrix} m_1 \ddot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (k_1+k_2)/m_1 & -k_2/m_1 \\ -k_2/m_2 & k_2/m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) + A_{12} A_{21} = 0$$

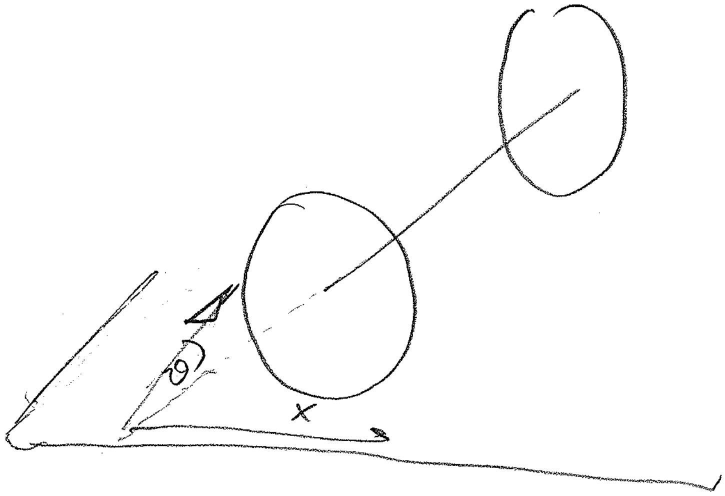
$$\omega_{1,2}^2 = \lambda_{1,2} = \frac{A_{11} + A_{22} \pm \sqrt{(A_{11}+A_{22})^2 - 4 A_{12} A_{21}}}{2}$$

4.

x, y: középpont

$\varphi_{1,2}$: elfordulások

ϑ: tengely szöge

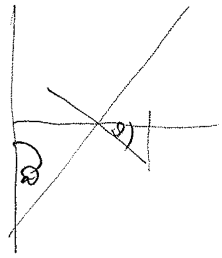


a felső kerék középpontjának helye:

$$x_1 = x + \frac{l}{2}\sin\vartheta$$

$$y_1 = y + \frac{l}{2}\cos\vartheta$$

a kényszer: $$a\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{x}_1}{\cos\vartheta} = -\frac{\dot{y}_1}{\sin\vartheta}$$



hasonlóan az alsó keréknél

$$a\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_2}{\cos\vartheta} = -\frac{\dot{y}_2}{\sin\vartheta}$$

$$x_2 = x - \frac{l}{2}\sin\vartheta$$

$$y_2 = y - \frac{l}{2}\cos\vartheta$$

így tehát

$$a\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{x} + \frac{l}{2}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}}{\cos\vartheta} = -\frac{\dot{y} - \frac{l}{2}\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}}{\sin\vartheta}$$

$$a\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x} - \frac{l}{2}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}}{\cos\vartheta} = -\frac{\dot{y} + \frac{l}{2}\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}}{\sin\vartheta}$$

összeadva:

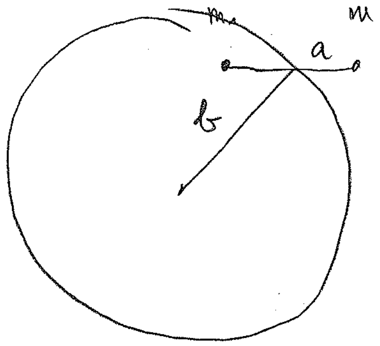
$$a(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = 2\frac{\dot{x}}{\cos\vartheta} = 2\frac{\dot{y}}{\sin\vartheta}$$ (anholonóm)

kivonva

$$a(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = l\dot{\vartheta}$$ integrálható! (holonóm)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{l}{a}\vartheta$$

5.



a rúd középpontjának helye:

$$X = b\cos\varphi_1$$

$$Y = b\sin\varphi_1$$

a két test helye a rúd középpontjához képest:

$$x_1' = a\cos\varphi_2 \qquad x_2' = -a\cos\varphi_2$$

$$y_1' = a\sin\varphi_2 \qquad y_2' = -a\sin\varphi_2$$

így a testek helye:

$$x_{1,2} = X + x_{1,2} = b\cos\varphi_1 \pm a\cos\varphi_2 \qquad \dot{x}_{1,2} = -b\sin\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 \mp a\sin\varphi_2\,\dot{\varphi}_2$$

$$y_{1,2} = Y + y_{1,2} = b\sin\varphi_1 \pm a\sin\varphi_2 \qquad \dot{y}_{1,2} = b\cos\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 \pm a\cos\varphi_2\,\dot{\varphi}_2$$

A kinetikus energia:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$

$$\frac{m}{2}\Big[b^2\sin^2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1^2 + a^2\sin^2\varphi_2\,\dot{\varphi}_2^2 + ab\sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$
$$+ b^2\cos^2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1^2 + a^2\cos^2\varphi_2\,\dot{\varphi}_2^2 + ab\cos\varphi_1\cos\varphi_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\Big]$$

$$+\frac{m}{2}\Big[b^2\sin^2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1^2 + a^2\sin^2\varphi_2\,\dot{\varphi}_2^2 - ab\sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$
$$+ b^2\cos^2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1^2 + a^2\cos^2\varphi_2\,\dot{\varphi}_2^2 - ab\cos\varphi_1\cos\varphi_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\Big]$$

$$= m\left[b^2\dot{\varphi}_1^2 + a^2\dot{\varphi}_2^2 \right] \qquad L = K - V$$

6. Kiskocsi

ld. 6. gyakorlat, 2. feladat, Lagrange-féle elsőfajú M.E.

$$y = f(x) = a\ln\cos\left(\cancel{x}\ \frac{x}{a}\right)$$

$x' = \frac{x}{a} \cdot t$, $y' = \frac{y}{a} \cdot t$ bevezetve, a vesszőket elhagyva

$$y = \ln\cos(x) \qquad \varphi(x,y) = y - f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda f'(x) \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \end{aligned}\right\} \text{ mozg. egy.}$$

$\to \lambda$ kifejezhető, $\dot{x}$ pedig

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \underbrace{\dot{y}^2}_{(f'(x)\dot{x})^2}) = mg\underbrace{(h - y)}_{(h - f(x))} \text{ -ből}$$

$$\lambda = \frac{mg}{1 + f'(x)^2}\left(f''(x)\frac{2\cancel{g}(h - f(x))}{1 + f'(x)^2} + 1\right)$$

$$K = \lambda\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$f(x) = \ln\cos x$$

$$1 + f'(x)^2 = 1 + tg^2 x = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = -tg\,x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\lambda = mg\cos^2 x\left(-2(h - \underbrace{f(x)}_{\ln\cos x}) + 1\right)$$

$$K = \frac{1}{\cos x} \cdot \lambda = mg\cos x\,(1 - 2(h - \ln\cos(x)))$$

7.

$$V(r) = k \cdot \ln(r)$$

$$V_{eff}(r) := V(r) + \frac{N^2}{2mr^2} = k\ln(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

körpálya sugara: egyensúlyi hely a eff. potenciálban

$$0 \overset{!}{=} V_{eff}'(r_c) = \frac{k}{r_c} - \frac{N^2}{mr_c^3}$$

$$kr_c^2 - \frac{N^2}{m} = 0$$

$$r_c = \sqrt{\frac{N^2}{km}}$$

rad. potenciálban való rezgések frekvenciája

$$V''(r_c) = -\frac{k}{r_c^2} + \frac{3N^2}{mr_c^4} = -\frac{k^2m}{N^2} + \frac{3\cancel{N^2}}{m}\frac{k^2m^2}{N^{\cancel{4}2}}$$

$$r_c^2 = \frac{N^2}{km}$$

$$= -\frac{k^2m}{N^2} + 3\frac{k^2m}{N^2} =$$

$$= 2\frac{k^2m}{N^2} > 0$$

a körpálya tehát stabil, $\omega^2 = \frac{V''(r_c)}{m} = 2\frac{k^2}{N^2}$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} = \frac{\cancel{N}}{\cancel{m}}\frac{k\cancel{m}}{N^{\cancel{2}}} = \frac{k}{N}$$

$$\frac{\omega}{\dot{\varphi}} = \sqrt{\frac{2k^2}{N^2}} \Big/ \frac{k}{N} = \sqrt{2}$$

r-től ftlen

irracionális

$\Downarrow$

semmilyen, a körpályától kicsit eltérő pálya nem zárul.

8. a) $S = \int L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)\, dt$

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta \ddot{x} \right] dt$$

parc. integrálás

$$\int \underset{u}{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}} \underset{v'}{\delta \dot{x}}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x \Big|_{t_1}^{t_2}}_{0 \text{ a határon}} - \int \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\, dt$$

$$\int \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta \ddot{x}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta \dot{x}\Big|_{t_1}^{t_2}}_{\text{a határon legyen 0}} - \int \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta \dot{x}\, dt = \overbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}}^{\text{határon } \delta x \text{ nulla}} + \int \left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x\, dt$$

(kétszer parciálisan integrálva)

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right] \delta x\, dt$$

funkcionálderivált: δx együtthatója

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x}$$

Euler–Lagrange-egy. megfelelője: $\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$

b) pl. $L = -\frac{m}{2}x\ddot{x} - \frac{k}{2}x^2$ $\qquad \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -\frac{m}{2}x \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{m}{2}\ddot{x} - kx$

mozg. egy: $-\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m}{2}x\right)}_{-\frac{m}{2}\ddot{x}}$ ... $- \frac{m}{2}\ddot{x} - kx = 0$ $\qquad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$

Harmónikus oszcillátor

$$-\frac{m}{2}\ddot{x}$$

szokásos: $L' = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 - kx^2$

különbség: $L - L' = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{m}{2}x\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}x\dot{x}\right)$ teljes idöderivált.