

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

LIVRE I

Archimède à Dositée, joie !

Je t'ai envoyé précédemment, des propositions examinées par moi, la suivante, dont j'avais rédigé l'énoncé et la démonstration : tout segment limité par une droite et par une parabole¹ est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment². D'autres théorèmes importants m'étant venus à l'esprit dans la suite, j'en ai élaboré les démonstrations. Les voici : en premier lieu, la surface de toute sphère est équivalente au quadruple de son grand cercle³ ; en second lieu, la surface de tout segment de sphère est équivalente au cercle, dont le rayon est égal au segment de droite mené du sommet du segment (sc. de la sphère) à (sc. un point de) la circonférence du cercle qui est la base du segment⁴ ; de plus, pour toute sphère, le cylindre ayant une base égale au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est lui-même équivalent aux trois demis de la sphère, et sa surface est équivalente aux trois demis de la surface de la sphère⁵. Ces propriétés préexistaient, liées à la nature des figures indiquées, mais elles étaient ignorées de ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, personne d'entre eux ne s'étant aperçu que les mesures de ces figures sont comparables ; je n'hésite donc pas à ranger ces proposi-

1. La parabole est désignée par Archimède par « section d'un cône rectangle » ; cf. l'explication de ce nom à la page 148.

2. Cette propriété est démontrée dans le traité *La quadrature de la parabole*, prop. 17 et 24.

3. Cf. *De la sphère et du cylindre* I, 30.

4. Cf. *ibid.* I, 39 et 40.

5. Cf. *ibid.* I, 34 ; coroll.

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

A

Ἀρχιμήδης Δοσίτῳ Χαίρειν

Πρότερον μὲν ἀπέσταλκά σοι τῶν ὑφ' ἡμῶν τεθεωρημένων γράψας μετὰ ἀποδείξεως, ὅτι πᾶν τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίρριτον ἔστι τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον· ὕστερον δὲ ἡμῶν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίαν λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

Ἔστιν δὲ τὰδε· πρῶτον μὲν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶν τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ· ἔπειτα δέ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῆ ἐπιφάνειά ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῆ εὐθείᾳ τῆ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἀγομένη ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος· πρὸς δὲ τοῖσι, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύκλιδος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτῆς τε ἡμιδίοδος ἐστὶν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῆ φύσει προυπηήρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἡγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινοηκότος ὅτι τοῦτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία·

5 τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν C : τριγωνὶ habentis basem eandem B τούτων τὴν βάσιν D τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν G ἔχοντος CD : om. G || 7 αὐτῶν BC : αὐτὰ D om. G || 9 τῶν ἐν αὐτῇ BCG : om. D || 11 κύκλιδος BCG : κώνῳ D || 20 οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινοηκότος BC : ενοηκότος D νενοηκότος G.

tions parmi celles qui ont fait l'objet des recherches des autres géomètres et parmi celles, concernant les figures solides, qui ont été étudiées par Eudoxe et qui paraissent beaucoup plus importantes, à savoir le théorème que toute pyramide est la troisième partie du prisme ayant même base et même hauteur que la pyramide¹, et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône. Ces propriétés préexistaient bien, comme étant liées à la nature de ces figures ; mais bien qu'il y eût avant Eudoxe de nombreux géomètres de valeur, il arriva qu'elles fussent ignorées de tous et que personne ne s'en aperçût. Mais il sera possible à ceux qui en seront capables d'examiner mes propositions. Il eût, certes, fallu qu'elles fussent publiées encore du vivant de Conon ; car c'est surtout lui, à mon avis, qui eût été en mesure de les comprendre et de porter sur elles un jugement adéquat. Mais estimant indiqué de les communiquer à ceux qui ont l'expérience des mathématiques je t'envoie les démonstrations que j'en ai rédigées ; il sera loisible à ceux qui s'occupent des mathématiques de les examiner. Sois en bonne santé !

Voici donc d'abord le texte des définitions² et des postulats servant à la démonstration des propositions.

DEFINITIONS

1. Il y a dans le plan des lignes courbes limitées, qui ou bien sont entièrement situées d'un même côté des droites joignant leurs extrémités ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.

2. J'appelle concave dans le même sens une ligne telle que, si on y prend deux points quelconques, les

1. Cf. Euclide XII, prop. 3 sq.
2. Le terme des manuscrits est ἀξιώματα, axiomes, mais les six paragraphes qui suivent contiennent les définitions des principales notions auxquelles Archimède fera appel dans les démonstrations de ce traité.

διότι οὐκ ἂν ἀκνήσασμι ἀντιπαράβαλὲν αὐτὰ πρὸς τὰ τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δοξάζοντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ σφαιρὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἔστί μέρος πρίματος τοῦ βάσιον ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῆι πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἔστί τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιον ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ γὰρ τοῦτων προσηγορούντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεμετρῶν συνέβησαν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μῆδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι. Ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκεψασθαι τοῖς δυνατομένοις. Ὡφείλε μὲν οὖν Κώνωνος ἐπιζῶντος ἐκδιδόσθαι ταῦτα· τήνον γὰρ ὑπολαμβάνομεν που μάλαστα ἂν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἀρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφασιν ποιήσασθαι· δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οικείοις τῶν μαθημάτων ἀποστρέλλομεν σοὶ τὰς ἀποδείξεις ἀναγράφαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρέφομένοις ἐπισκεψασθαι. Ἐργωμένως.

20 Γράφονται πρώτον τὰ τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ

25 α'. Εἰσὶ τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἱ τῶν τὰ πέριχα ἐπιγεωγνουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἦτοι ὄλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἔτερα.

β'. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δη καὶ ἄλλαν καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμὴν, ἐν ἣ ἂν δύο σημείων λαμβανόμενων ὁποιοῦσιν αἱ μεταξύ

8 τούτων BCG : που τῶν D || 15 ἀπόφασιν BCD : ἀπόφασιν G || 18 περὶ CECH : εἰσιν B τε D || 20 τὰ τε ἀξιώματα BCGH : τὰ τε ἀξιώματ D τὰ τε ἀξιώματ E.

segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même côté de la ligne, ou bien certains du même côté et certains sur la ligne, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.

3. Il y a, de même, des surfaces limitées, non situées, elles-mêmes, dans un plan, mais ayant leurs limites dans un plan, qui ou bien sont entièrement situées du même côté du plan, dans lequel elles ont leurs limites, ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.

4. J'appelle concaves dans le même sens des surfaces telles que, si on y prend deux points, les segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même côté de la surface, ou bien certains du même côté et certains sur la surface, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.

5. J'appelle secteur solide, lorsqu'un cône ayant son sommet au centre d'une sphère coupe cette sphère, la figure comprise entre la surface du cône et la partie de la surface de la sphère qui est située à l'intérieur du cône.

6. J'appelle rhombe solide la figure composée de deux cônes ayant la même base et dont les sommets sont situés de part et d'autre du plan de la base de manière que leurs axes sont situés en ligne droite.

I. POSTULATS

J'admets ce qui suit :

1^o De toutes les lignes ayant les mêmes extrémités la plus courte est la droite¹.

2^o Quant aux autres lignes, elles sont inégales lorsque, situées dans un plan et ayant les mêmes extrémités,

1. Proclus cherche à établir un lien entre cette définition et celle d'Euclide, Elem. I, def. 4 ; cf. Proclus in Eucl. p. 110.

τῶν σημείων εὐθεῖαι ἦτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμίᾳ.

γ'. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπιφανειαί τινὲς εἰσιν πεπερασμένα, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, αἶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσι, ἦτοι ὄλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσι ἐπὶ τὰ ἕτερα.

δ'. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἦτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμίᾳ.

ε'. Τοιᾶ δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὴν σφῆραν κῶνος ῥέμνη κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κῶνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κῶνου.

ς'. Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὴν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσι ἐφ' ἐκείτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὄσι κείμενοι, τὸ ἔξ ἀμφοῖν τοῖν κῶνων συγκεκείμενον στερεὸν σχῆμα.

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Λαμβάνω δὲ ταῦτα :

α'. Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθείαν.

β'. Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσι, ἀνίστους εἶναι τὰς τοιαύτας,

6 αὶ Heiberg : καὶ BCDEGH || 7 ἔχουσι D : habent B ἔχουσαι CEFGH || 14 τῷ κέντρῳ C : τὸ κέντρον DEGH. || 24 τῶν C : τῶ τῶν DEGH || 26 ἂν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσι, ἀνίστους BDEGH : om. C.