DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

Livre I

Archimède à Dosithée, joie !

Je t'ai envoyé précédemment, des propositions examinées par moi, la suivante, dont j'avais rédigé l'énoncé et la démonstration : tout segment limité par une droite et par une parabole[1] est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment[2]. D'autres théorèmes importants m'étant venus à l'esprit dans la suite, j'en ai élaboré les démonstrations. Les voici : en premier lieu, la surface de toute sphère est équivalente au quadruple de son grand cercle[3] ; en second lieu, la surface de tout segment de sphère est équivalente au cercle, dont le rayon est égal au segment de droite mené du sommet du segment (sc. de la sphère) à (sc. un point de) la circonférence du cercle qui est la base du segment[4] ; de plus, pour toute sphère, le cylindre ayant une base égale au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est lui-même équivalent aux trois demis de la sphère, et sa surface est équivalente aux trois demis de la surface de la sphère[5]. Ces propriétés préexistaient, liées à la nature des figures indiquées, mais elles étaient ignorées de ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, personne d'entre eux ne s'étant aperçu que les mesures de ces figures sont comparables ; je n'hésite donc pas à ranger ces proposi-

1. La parabole est désignée par Archimède par « section d'un cône rectangle » ; cf. l'explication de ce nom à la page 148.
2. Cette propriété est démontrée dans le traité *La quadrature de la parabole*, prop. 17 et 24.
3. Cf. *De la sphère et du cylindre* I, 30.
4. Cf. *ibid.* I, 39 et 40.
5. Cf. *ibid*, I, 34 ; coroll.

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Α

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Πρότερον μὲν ἀπέσταλκά σοι τῶν ὑφ' ἡμῶν τεθεωρημένων γράψας μετὰ ἀποδείξεως, ὅτι πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον· ὕστερον δὲ ἡμῖν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίων λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. Ἔστιν δὲ τάδε· πρῶτον μέν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶν τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ· ἔπειτα δέ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος· πρὸς δὲ τούτοις, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία·

5 τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν C : trigoni habentis basem eandem B ταύτην τὴν βάσιν D τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν G ‖ ἔχοντος CD : om. G ‖ 7 αὐτῶν BC : αὐτά D om. G ‖ 9 τῶν ἐν αὐτῇ BCG : om. D ‖ 11 κύκλος BCG : κώνῳ D ‖ 20 οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος BC : ενοηκότος D νενοηκότος G.

tions parmi celles qui ont fait l'objet des recherches des autres géomètres et parmi celles, concernant les figures solides, qui ont été étudiées par Eudoxe et qui paraissent beaucoup plus importantes, à savoir le théorème que toute pyramide est la troisième partie du prisme ayant même base et même hauteur que la pyramide[1], et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône. Ces propriétés préexistaient bien, comme étant liées à la nature de ces figures ; mais bien qu'il y eût avant Eudoxe de nombreux géomètres de valeur, il arriva qu'elles fussent ignorées de tous et que personne ne s'en aperçût. Mais il sera possible à ceux qui en seront capables d'examiner mes propositions. Il eût, certes, fallu qu'elles fussent publiées encore du vivant de Conon ; car c'est surtout lui, à mon avis, qui eût été en mesure de les comprendre et de porter sur elles un jugement adéquat. Mais estimant indiqué de les communiquer à ceux qui ont l'expérience des mathématiques je t'envoie les démonstrations que j'en ai rédigées ; il sera loisible à ceux qui s'occupent des mathématiques de les examiner. Sois en bonne santé !

Voici donc d'abord le texte des définitions[2] et des postulats servant à la démonstration des propositions.

Définitions

1. Il y a dans le plan des lignes courbes limitées, qui ou bien sont entièrement situées d'un même côté des droites joignant leurs extrémités ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.

2. J'appelle concave dans le même sens une ligne telle que, si on y prend deux points quelconques, les

1. Cf. Euclide XII, prop. 3 sq.
2. Le terme des manuscrits est ἀξιώματα, axiomes, mais les six paragraphes qui suivent contiennent les définitions des principales notions auxquelles Archimède fera appel dans les démonstrations de ce traité.

διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι. Ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκέψασθαι τοῖς δυνησομένοις. Ὤφειλε μὲν οὖν Κόνωνος ἔτι ζῶντος ἐκδίδοσθαι ταῦτα· τῆνον γὰρ ὑπολαμβάνομέν που μάλιστα ἂν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἁρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφασιν ποιήσασθαι· δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. Ἐρρωμένως.

Γράφονται πρῶτον τά τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ

α'. Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

β'. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ

8 τούτων BCG : που τῶν D ‖ 15 ἀπόφασιν BCD : ἀπόφανσιν G ‖ 18 περὶ CEGH : etiam B τε D ‖ 20 τά τε ἀξιώματα BCGH : τώ τε ἀξίωμα D τό τε ἀξίωμα E.

segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même côté de la ligne, ou bien certains du même côté et certains sur la ligne, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.

3. Il y a, de même, des surfaces limitées, non situées, elles-mêmes, dans un plan, mais ayant leurs limites dans un plan, qui ou bien sont entièrement situées du même côté du plan, dans lequel elles ont leurs limites, ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.

4. J'appelle concaves dans le même sens des surfaces telles que, si on y prend deux points, les segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même côté de la surface, ou bien certains du même côté et certains sur la surface, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.

5. J'appelle secteur solide, lorsqu'un cône ayant son sommet au centre d'une sphère coupe cette sphère, la figure comprise entre la surface du cône et la partie de la surface de la sphère qui est située à l'intérieur du cône.

6. J'appelle rhombe solide la figure composée de deux cônes ayant la même base et dont les sommets sont situés de part et d'autre du plan de la base de manière que leurs axes sont situés en ligne droite.

I. Postulats

J'admets ce qui suit :

1° De toutes les lignes ayant les mêmes extrémités la plus courte est la droite[1].

2° Quant aux autres lignes, elles sont inégales lorsque, situées dans un plan et ayant les mêmes extrémités,

1. Proclus cherche à établir un lien entre cette définition et celle d'Euclide, Elem. I, def. 4 ; cf. Proclus in Eucl. p. 110.

τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

γ'. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, αἳ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

δ'. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

ε'. Τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου.

ϛ'. Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα.

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Λαμβάνω δὲ ταῦτα·

α'. Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν.

β'. Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας,

6 αἳ Heiberg : καὶ BCDEGH ‖ 7 ἔχουσιν D : habent B ἔχουσαι CEGH ‖ 14 τῷ κέντρῳ C : τὸ κέντρον DEGH. ‖ 24 τῶν C : τῷ τῶν DEGH ‖ 26 ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους BDEGH : om. C.