

A plazmafizika alapfogalmai

„Negyedik halmazállapot” a leggyakrabban előforduló halmazállapot

De: első definíció csak 1923 (Langmuir) – ionizált gáz

Általános eset: pozitív és negatív töltésű, és semleges részecskéket tartalmazó gáz.

- Föld külső atmoszférája (ionosféra)
- Csillag-atmosféra
- Kozmikus tér
- Gázkisülések, a fénycsőtől a termonukleáris fúzióig
- Szilárdtestplazma (fémek) - nanoplaszma

Paraméterek:

- átlagos koncentráció n_i ionfajtánként
- ionizációs fok n_i/n_n , ha $<10^{-2} - 10^{-3}$ gyengén ionizált
→ ∞ teljesen ionizált
- részecskék e_i , m_i
 $|e| = 4.8 \times 10^{-10}$ esu = 1.6×10^{-19} C,
 $m_e = 9.1 \times 10^{-28}$ g = 9.1×10^{-31} kg (fémekben m^*)

Egy ionfajtát tekintünk a továbbiakban:

Z : atomszám, ξ az iontöltés = ionból (fajl.: N_ξ) = hiányzó elektronszám

$\sum_0^Z N_\xi = n_i$ átlagos ionsűrűség, $n_e = \sum_0^Z \xi N_\xi$ elektronsűrűség

$\langle Z \rangle = n_e/n_i$ átlagos töltés

$m_i = M = A * 1.66 \times 10^{-27}$ kg (A atomsúly)

$m_n \approx m_i$ (megj.: CGS – SI rendszer)

n_i ionsűrűség esetén egy ionra $V_i = 1/n_i$ térfogat jut.

Def. (**iongömb**): $V_i = 4\pi/3 R_i^3 = 1/n_i$.

Az iongömb sugara a **Wigner-Seitz** sugár:

$$R_i = \left(\frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3}$$

A gömbön belül 1 db $\langle Z \rangle$ átl. töltésű ion van és $\langle Z \rangle$ db szabad elektron.

Hőmérséklet: termikus mozgásból

Termodinamikai egyensúly: A plazma akkor egy hőmérsékletű (T), ha: minden fajta részecske olyan impulzusú, ami azonos hőmérsékletű Maxwell-eloszlásnak felel meg.

Részleges termodinamikai egyensúly (gyakoribb): a különböző komponensek különböző hőmérsékletű Maxwell-eloszlásúak:

$$f_i = \frac{N_i}{(2\pi m_i T_i)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_i^2}{2m_i T_i}\right)$$

Az egyes komponensek hőmérséklete (ált. $T_i = k_B T_i$):

$$\frac{3}{2} k_B T_i = \left\langle \frac{m_i v_i^2}{2} \right\rangle$$

ahol $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K = Boltzmann állandó.

Degenerált plazmák: Fermi-eloszlás

ha a Fermi energia $>$ termikus energia.

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_e^{2/3}}{2m_e} \gg k_B T_e$$

Ekkor a részecskék Fermi-eloszlásúak:

$$f = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \exp\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{E_F}{T}\right) + 1 \right\}^{-1}$$

Plazma kvázineutralitása

Plazma pontosabb definíciója: Nem minden ionizált gáz plazma, csak a kvázineutrális, azaz ami elég nagy távolságból semlegesnek tekinthető, azaz
$$\sum_i e_i N_i = 0$$

ahol e_i és N_i a megfelelő töltés és koncentráció. Egyfajta, egyszeresen ionizált atom: $N_e = N_i$ és a töltésre is $e_e = -e_i$.

Karakterisztikus idő, plazmarezgések:

Kezdetben egyensúly, töltést eltávolítva: $F \approx e^2 / r_{\text{átl}}^2$,

ahol a részecskék közötti távolság:

$$r_{\text{átl}} = \left(\frac{3}{4\pi N_e} \right)^{1/3}$$

Ez a Coulomb-erő egy rezgőmozgást hajt meg, a rezgőmozgásra:

$$F = mr\omega^2$$

Az elektronrezgés frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{mr_{\text{átl}}}} \approx \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{3m}} \propto \omega_p$$

ahol $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$ az elektron-plazma (Langmuir) frekvencia.

A plazmafrekvencia hőmérsékletfüggetlen.

Térbeli töltéseloszlás karakterisztikus hossza:
plazmarezgés ideje alatt termikus sebességgel megtett út:

$$d \approx \frac{v_{te}}{\omega_p} = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 N_e}} = r_D \quad \text{az ún. Debye-hossz, amire } r_D = 7 \sqrt{\frac{T(K)}{N_e(\text{cm}^{-3})}} [\text{cm}]$$

**A plazma tehát akkor kvázineutrális,
ha karakterisztikus hossza (L) sokkal nagyobb a
Debye-hossznál, $L \gg r_D$.**

Langmuir-rezgés, más levezetés

Elektronrezgés egyenletesen elkent ionháttér mellett.

Kezdeti elmozdulás: \mathbf{S} . A nem kompenzált töltés:

$$\rho = \operatorname{div} eN_e \mathbf{S} = eN_e \operatorname{div} \mathbf{S}$$

Poisson-egyenlet: $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi eN_e \operatorname{div} \mathbf{S}$

Mivel $\mathbf{S}=0$ esetén $\mathbf{E}=0$: $\mathbf{E} = 4\pi eN_e \mathbf{S}$

Azaz \mathbf{E} párhuzamos az elmozdulással. A többi elektronra ható erő:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = -4\pi e^2 N_e \mathbf{S},$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2} = -e\mathbf{E} = -4\pi e^2 N_e \mathbf{S}$$

Ez pedig az egyensúlyi helyzet ($\mathbf{S}=0$) körüli ω_p frekvenciájú rezgések egyenlete.

Plazma = töltött részecskegáz

Gázközelítés:

Részecskék átlagos kinetikus energiája » potenciális energiája.
Csak ekkor szabad a részecskék mozgása.

Coulomb-kölcsönhatás: $\frac{e^2}{r_{\text{átl}}} = e^2 N^{1/3} \ll k_B T$.

Definiálható az η plazmaparaméter:

$$\eta = \frac{e^2}{r_{\text{átl}} k_B T} = \frac{e^2 N^{1/3}}{k_B T} \propto \frac{e^2 4\pi e^2 N}{r_{\text{átl}} k_B T 4\pi e^2 N} \propto \frac{r_{\text{átl}}^2}{r_D^2} \ll 1.$$

A gázközelítés $\eta \ll 1$ esetén érvényes. Azt jelenti, hogy a részecskék átlagos távolsága kisebb a Debye-sugárnál, azaz a Debye-sugarú gömbön belül sok részecske van. A feltétel ált. teljesül, pl ionoszféra ($\eta \leq 10^{-4}$), fúzió ($\eta \leq 10^{-2}$).

Térbeli és időbeli skála

Térben és időben változó töltésállapot: $N_{\xi}(\mathbf{r}, t)$,

lokális, adott pillanatnyi sűrűség, hőmérséklet: $n_i(\mathbf{r}, t)$, $T_e(\mathbf{r}, t)$

Lokálisan egy adott pillanatban: $\sum_0^Z N_{\xi}(\mathbf{r}, t) = n_i(\mathbf{r}, t)$

Az elektronokra az átlagtöltés nem írható hasonlóan, nem lokalizálódnak.

Térbeli változás a plazmagradiens hossza, amelyen az átlagos mennyiségek változnak:

$$L_{plasma} = \left| \frac{n_i}{\nabla n_i} \right| \quad \text{vagy} \quad L_{plasma} = \left| \frac{T_e}{\nabla T_e} \right|$$

Homogén izotrop plazma esetén nem érdekesek, de összehasonlíthatók az iongömb sugarával, az azon belüli változó töltéseloszlással (atomfizikai skála).

Több időbeli skála van. A plazma-evolúció skálája:

$$t_{plasma} = \left| \frac{n_i}{\partial n_i / \partial t} \right| \quad \text{vagy} \quad t_{plasma} = \left| \frac{T_e}{\partial T_e / \partial t} \right|$$

Stacionárius esetben ez sem érdekes.

A (forró) plazmát inkább a plazmafrekvencia jellemzi, amely idő alatt a szabad elektronok válaszolnak a változásokra (Spitzer, 1962).

Térbeli és időbeli skála 2.

$$\tau_p = \frac{2\pi}{\omega_p}, \quad \omega_p = \left[\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right) \right]^{1/2} \approx \left(\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \right)^{1/2}$$

Mivel ez csak az elektronsűrűségtől függ, ezért felírható:

$$\tau_p = 3.52 \times 10^{-15} \left(\frac{10^{21} \text{ cm}^{-3}}{n_e} \right)^{1/2} \text{ s}$$

A másik időállandó a v elektron-sebességtől és a σ (üt.) hatáskeresztmetszettől függ

$$\tau_a = \frac{1}{n_e \langle \sigma v \rangle}$$

Ez a hőmérséklettől is függ, komplikáltabb.

Végül az atomi időskála, ami az elektrópályán való körbejárást jellemzi, a

Kepler-Bohr formula:

$$\tau_B = \frac{\pi \langle Z \rangle \hbar}{E_H} \left(\frac{E_H}{|E|} \right)^{3/2}$$

Itt $E_H = 13.6 \text{ eV}$ a H atom alapállapotú energiája, $|E|$ az elektronenergia. Ez hőmérséklet- és sűrűségfüggetlen, csak Z -függő, ezért ($1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$):

$$\tau_B = 1.52 \times 10^{-16} \langle Z \rangle \left(\frac{E_H}{|E|} \right)^{3/2} \text{ s}$$

Atomi potenciál, Debye-Hückel elmélet

Sűrű plazmában az atomi elektronpályák átfednek, a Coulomb-potenciált a szabad és kötött elektronok leárnyékolják.

$$V(r) = \frac{Ze}{r} S(r)$$

$S(r)$ az árnyékolási tényező, Z a mag töltése. A mag közelében $S(r \rightarrow 0) = 1$, attól távolodva a szabad és kötött elektronok leárnyékolják a magot, $S(r \rightarrow \infty) = 0$.

Debye-modell: Tek. $r=0$ -ban egy ξ töltésű iont. Az ionok sűrűsége $N_\xi(\mathbf{r})$, az elektron-sűrűség $n_e(\mathbf{r})$. A Poisson-egyenlet:

$$\nabla^2 V(r) = -4\pi e \left(\sum_{\xi=0}^Z \xi N_\xi(r) - n_e(r) \right)$$

Ezt kell V -re megoldani. Mind az elektronok, mind az ionok Boltzmann-eloszlásúak (a Debye-Hückel modellben, az r nélküli mennyiségek átlagok):

$$N_\xi(r) = N_\xi \exp\left(-\frac{e\xi V(r)}{T}\right)$$

$$n_e(r) = n_e \exp\left(+\frac{e\xi V(r)}{T}\right)$$

Önkonzisztens, közelítő megoldás lehetséges, ha $eV(\mathbf{r})/T \ll 1$.

Ez forró plazmákban igaz. Elsőrendben:

Atomi potenciál, Debye-Hückel elmélet 2.

$$\nabla^2 V(r) = 4\pi e \left[\sum_{\xi=0}^Z \xi N_{\xi} \left(1 - \frac{e\xi V(r)}{T} \right) - n_e \left(1 + \frac{eV(r)}{T} \right) \right] = -4\pi \frac{e^2 V(r)}{T} \left[- \sum_{\xi=0}^Z \xi^2 N_{\xi} - n_e \right] = \frac{4\pi e^2 (\overline{Z^2} + \overline{Z})}{T} n_i V(r) = \frac{1}{r_D^2} V(r)$$

r_D itt is a Debye-hossz, egy pontosabb definícióval:

$$r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 n_i (\overline{Z^2} + \overline{Z})}} \quad \text{ahol } \overline{Z^2} = \sum \xi^2 N_{\xi} / n_i$$

Gömbszimmetriájú potenciál esetén a szögfüggések kiesnek, ekkor:

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \quad \text{A } V(r)\text{-be behelyettesítve } S(r) = rV(r)/Ze \text{ árnyékoló potenciált:}$$

$$\frac{d^2 S}{dr^2} = \frac{1}{r_D^2} S(r) \quad \text{Ennek megoldása leírja az } r=0 \text{ és } r \rightarrow \infty \text{ viselkedést:}$$

$$S(r) = e^{-r/r_D}$$

A Debye-Hückel potenciál pedig:

$$V(r) = \frac{Ze}{r} e^{-r/r_D}$$

A Coulomb potenciál a plazmában leárnyékolódik.

Plazma termodinamika

A termodinamika 2. főtétele: $dE=TdS-pdV$; a szabad energia: $F=E-TS$

$$dF=dE-SdT-TdS=TdS-pdV-SdT-TdS=-SdT-pdV.$$

Egy N részecskéből álló rendszerben az E_n állapot valószínűsége: $\exp(-E_n/kT)$.

Az állapotösszeg:

$$Q = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

Különböző molekulákból álló Boltzmann-gáz esetén szorzat alakú: $Q = \frac{Z_A^{N_A}}{N_A!} \cdot \frac{Z_B^{N_B}}{N_B!} \dots$

Itt a Z -k a különböző molekulák eloszlásfüggvényei, amelyek

$$Z = \sum_k e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}} \quad \text{alakúak.}$$

A szabad energia, felhasználva a Stirling formulát ($N! \sim (N/e)^N$):

$$F = -kT \ln Q = -N_A kT \ln \frac{Z_A e}{N_A} - N_B kT \ln \frac{Z_B e}{N_B} - \dots$$

Ha a molekuláknak több szabadsági fokuk van, egy-egy molekula eloszlásfüggvénye is előállítható szorzatalakban: $Z = Z_{\text{trans}} Z_{\text{rot}} Z_{\text{vib}} Z_{\text{el}}$.

Saha egyenlet

Feltételezzük, hogy egyfajta atomokból áll a gáz, és az ionizációs potenciálok I_1, \dots, I_m , az első, ill. m -edik elektron kiszabadításához kell.

Eszerint m elektron elmozdításához, m -szeres ionizációhoz kellő energia:

$$Q_m = I_1 + I_2 + \dots + I_m \quad (I_0 = 0).$$

T hőmérséklet, ρ sűrűség, N semleges atom; az m -szer ionizált atom az m -ion.

Szabad elektronok száma: N_e . Elég ritka gáz, Boltzmann egyensúly, a gázcsepp transzlációs energiája $3/2kT$. Egy m -ionnak W_m elektronikus gerjesztési energiája van.

Az egységnyi tömegű gáz belső energiája:

$$\varepsilon = \frac{3}{2} N(1 + \alpha_e)kT + N \sum_m Q_m \alpha_m + N \sum_m W_m \alpha_m,$$

ahol α_m a gáz ionizációs foka, azaz az az eredeti atom szabad elektronjainak száma, ill. az m -ionok koncentrációja: $\alpha_m = N_m/N$, $\alpha_e = N_e/N$.

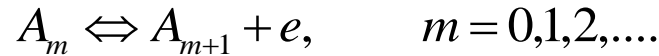
Atomszám-megmaradás és töltésmegmaradás:

$$\sum N_m = N, \quad \sum \alpha_m = 1.$$

$$\sum m N_m = N_e, \quad \sum m \alpha_m = \alpha_e.$$

Saha egyenlet 2

Egyensúlyi ion-koncentráció: az $(m+1)$ -ik elektron elmozdulása a disszociációhoz hasonlóan írható le:



Az ionizált gáz szabad energiája:

$$F = - \sum_m N_m kT \ln \frac{Z_m e}{N_m} - N_e kT \ln \frac{Z_e e}{N_e}$$

Itt Z_m és Z_e az eloszlásfüggvény egy m -ionra és elektronra.

Termodinamikai egyensúlyban állandó T és V esetén a szabad energiának minimuma van a részecskeszámra vonatkoztatva. Ionizációnál $\delta N_m = -\delta N_{m+1} = -\delta N_e$, és az összrészecskeszám nem változik. A $\delta F = 0$ esetén kapjuk:

$$\frac{N_{m+1} N_e}{N_m} = \frac{Z_{m+1} Z_e}{Z_m}$$

Az m -ionok és $m+1$ ionok transzlációs eloszlásfüggvényei kiesnek, mivel az iontömeg közel egyenlő. Az elektronikus járulékból kiemeljük az alapállapot járulékát:

$$Z_{el} = \sum e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}} = e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \sum e^{-\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_0}{kT}} = e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} u$$

Saha egyenlet 3

Az ionok gerjesztési energiája a k-ik állapotra: $w_k = \varepsilon_k - \varepsilon_0$. Az eloszlásfüggvény:

$$u = \sum_k e^{-\frac{w_k}{kT}} = g_0 + g_1 e^{-\frac{w_1}{kT}} + g_2 e^{-\frac{w_2}{kT}} + \dots,$$

ahol g_0, g_1, \dots a $0, 1, \dots$ energiaszintek statisztikai súlyai, azaz nem degenerált szintek esetén $g=1$.

Szabad elektronok esetén az eloszlásfüggvény a translációs eloszlásfüggvény és a szabad elektronok statisztikai súlyának szorzata, ami a 2 spinállapot miatt 2.

Figyelembe véve, hogy az $m+1$ és az m -ion 0-ponti energiái közti különbség az m -ion ionizációs potenciálja $\varepsilon_{0\ m+1} - \varepsilon_{0\ m} = I_{m+1}$ és a térfogatra normálva ($n_i = N_i/V$)

$$\frac{n_{m+1} n_e}{n_m} = 2 \frac{u_{m+1}}{u_m} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{I_{m+1}}{kT}} = K_{m+1}(T) \quad \text{Saha egyenlet}$$

az $\alpha_i = N_i/N$ koncentrációra egy teljes nemlineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$\frac{\alpha_{m+1} \alpha_e}{\alpha_m} = \frac{1}{\rho N} K_{m+1}(T), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Az u -ban általában elég az alapállapot statisztikai súlyát figyelembe venni.

Elektrodinamika plazmában

Térbeli és időbeli diszperzióval rendelkező közeg elektrodinamikája

Elektromos tér: külső + indukált

\mathbf{j}_0, ρ_0 : külső áram, töltés (forrás)

\mathbf{j}, ρ : indukált áram, töltés

Maxwell-egyenletek, mikroszkopikus leírás:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_0)$$

Kontinuitás-egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

A Lorentz erő (külső forrás elhanyagolva): $\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right)$

Elektromos eltolás bevezetése \mathbf{j} helyett:

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(t', \mathbf{r}).$$

Továbbra is mikroszkopikus tárgyalás (\mathbf{P} és \mathbf{M} nincs):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0$$

Nem zárt!

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Kapcsolat kell \mathbf{D} és \mathbf{E} vagy \mathbf{j} és \mathbf{E} között.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_0$$

Modell: lineáris elektrodinamika:

$$\mathbf{j}_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \sigma_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}_j(t', \mathbf{r}')$$

$$\mathbf{D}_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}_j(t', \mathbf{r}').$$

σ és ε konkrét modellből határozható meg.

Diszperzió

- **Def.:** A közeg diszperziója az, ahogy állapota a t, \mathbf{r} helyen függ a t', \mathbf{r}' -beli állapotoktól.
- Térbeli és időbeli diszperzió.
- Függ: töltések tehetetlensége, tér relaxációja, hatásterjedés hőmozgással.

Határfeltételek két közeg határán:

σ a felületi töltéssűrűség,
a 0 index a külső forrást
jelenti

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$$

$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_0),$$

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{i} + \mathbf{i}_0),$$

ahol \mathbf{i}_0 a külső felületi áram,

$$\mathbf{i} = -\frac{1}{4\pi} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} dx = -\int_1^2 \mathbf{j} dx$$

Komplex vezetési és dielektromos tenzor

Tér, idő homogén \rightarrow általános tulajdonságok

$$\mathbf{j}_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \boldsymbol{\sigma}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{E}_j(t', \mathbf{r}')$$

$$\mathbf{D}_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{E}_j(t', \mathbf{r}')$$

A linearitás miatt elég 1 Fourier komponenst tekinteni:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$$

Definiálva: $t_1 = t - t'$ és $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i(\omega, \mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^t \int d\mathbf{r}' \boldsymbol{\sigma}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{E}_j(t', \mathbf{r}') \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \\ &= \int_{-\infty}^t \int d\mathbf{r}' \boldsymbol{\sigma}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{E}_j(t', \mathbf{r}') \exp(i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \exp(i\omega t' - i\mathbf{k}\mathbf{r}') \\ &= \mathbf{E}_j(\omega, \mathbf{k}) \int_{-\infty}^t \int d\mathbf{r}' \boldsymbol{\sigma}_{ij}(t_1, \mathbf{r}_1) \exp(i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

Konvolúciós tétel

Ezzel pont a **konvolúciós tételt** kaptuk meg:

$$\mathbf{j}_i(\omega, \mathbf{k}) = \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}_j(\omega, \mathbf{k}) \quad \text{ahol}$$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \sigma_{ij}(t_1, \mathbf{r}_1) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)$$

a vezetőképesség Fourier-transzformáltja,

és hasonlóképpen $\mathbf{D}_i(\omega, \mathbf{k}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}_j(\omega, \mathbf{k})$

ahol $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \varepsilon_{ij}(t_1, \mathbf{r}_1) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)$

Az ω -függés az időbeli, a \mathbf{k} -függés a térbeli közeg-diszperzió.
D definícióját felhasználva **összefüggést kapunk** ε és σ között:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \quad ; \quad (\omega \neq 0)$$

Mivel **E**, **D** valós $\rightarrow \sigma_{ij}(t, \mathbf{r})$, $\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r})$ valós $\rightarrow \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ komplex \rightarrow

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}),$$

$$\text{Re } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \text{Re } \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}),$$

$$\text{Im } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im } \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}).$$

Izotrop közegben

ε csak a \mathbf{k} vektortól függ. Páros, ui. $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ -ra nem vált előjelet.
 $\rightarrow \varepsilon$ előállítható δ_{ij} és $k_i k_j$ tenzorokkal. Másodrangban:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \text{ és}$$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \sigma^{tr}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^l(\omega, \mathbf{k}).$$

ahol tr a transzverzális,
 l a longitudinális irány.
 Ellenőrzés: E-vel szorozva

Az összefüggések maradnak: $\varepsilon^{tr,l}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma^{tr,l}(\omega, \mathbf{k})$.

Izotrop esetben tehát $\operatorname{Re} \varepsilon^{tr,l}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} \varepsilon^{tr,l}(-\omega, \mathbf{k})$,
 $\operatorname{Im} \varepsilon^{tr,l}(\omega, \mathbf{k}) = -\operatorname{Im} \varepsilon^{tr,l}(-\omega, \mathbf{k})$.

Hasonló az összefüggés σ -ra a Re és Im cserével.

Mivel $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ az ω szerint egyoldali Fourier-transzformált, analitikus a felső félsíkon \rightarrow **Cauchy-tétel**:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k}) - \delta_{ij}}{\omega' - \omega}$$

A **Kramers-Kronig relációk** összefüggést adnak valós és imaginárius rész között.

$$\operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k})}{\omega' - \omega}$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k}) - \delta_{ij}}{\omega' - \omega}$$

A transzverzális és longitudinális komponensre is ugyanez.

A tenzorok meghatározása konkrét modellből.

Az elektromágneses tér energiája

Külső források munkavégzése: $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0$ $/ \cdot \mathbf{E}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad / \cdot \mathbf{B} \text{ kivonva}$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \mathbf{j}_0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \oint d\mathbf{S}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \int_V d\mathbf{r} \mathbf{E} \mathbf{j}_0$$

A felületi integrál ∞ közegben 0. A tér munkája a külső forrás ellen:

$$\frac{dA}{dt} = \int_V d\mathbf{r} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad \text{Ez változtatja meg a tér közegbeli energiáját:}$$

$$\frac{dW}{dt} = -\int_V d\mathbf{r} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} (\mathbf{B} \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}).$$

Monokromatikus síkhullámokat tekintve:

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \mathbf{E}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{D}^*(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Időátlagban:
$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \int d\mathbf{r} (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D}) = \frac{i\omega}{4\pi} V (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D}).$$

A V közegetérfogat nagy, gyorsabban nő a felületnél, így a felületi tag még nem lecsengő tér esetén is elhanyagolható.

A közeget figyelembe véve:

$$Q = \frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \int d\mathbf{r} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^* = \frac{i\omega}{4\pi} V [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*$$

Láttuk, hogy $\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k})$

1 idő alatt 1 térfogatban elnyelt hő:
$$\frac{Q}{V} = \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*$$

Hermitikus dielektromos állandójú közegben nincs hőelnyelés!

A monokromatikus síkhullámot semmi sem nyeli el.

Elnyelést az antihermitikus rész okoz.

Izotrop közeg:
$$\frac{Q}{V} = \frac{\omega}{4\pi k^2} \left\{ \text{Im} \varepsilon^l(\omega, k) |(\mathbf{k} \mathbf{E})|^2 + \text{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k) |[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]|^2 \right\}$$

Termodinamikai egyensúlyban a közeg csak elnyel, nem táplál:

$$Q > 0 \Rightarrow \text{Im} \varepsilon^l(\omega, k) > 0 \text{ és } \text{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k) > 0$$

Ha ez sérül, a közeg-energia csökken, a hullám energiája nő
→ instabilitás.

Elektromágneses hullám közegbeli terjedésének szükséges feltétele:

$$\text{Im} \varepsilon^l \leq 0, \quad \text{Im} \varepsilon^{tr} \leq 0$$

Ha a termodinamikai egyensúly feltétele sérül, negatív energiájú hullámról beszélnek, ez az instabilitás.

Általánosabb eset monokromatikus terek szuperpozíciójaként tekinthető, ahol egy lassan, ω körül változó amplitudót tekintenek.

Nem monokromatikus síkhullám

Ált. eset:
$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)}_{\text{lassan változó}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

idő szerinti Fourier-transzformáció:
$$\Rightarrow \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega' t} \mathbf{E}(\omega', \mathbf{r})$$

$\mathbf{E}(\omega', \mathbf{r})$: maximum $\pm \omega$ - nál
$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) = \int_0^{\infty} d\omega' e^{-i(\omega - \omega')t} \mathbf{E}(\omega', \mathbf{k})$$

és a konjugált :
$$\mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^0 d\omega' e^{-i(\omega' - \omega)t} \mathbf{E}^*(\omega', \mathbf{k})$$

Felt.: \mathbf{B} és $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}, t)$ hasonló, akkor $\omega' \pm \omega$ szerint sorbafejtve az időben átlagolt energiaváltozás első rendben a köv. lesz:

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V d\mathbf{r} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} (\mathbf{B}\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}).$$

$$\frac{1}{V} \overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t) + E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial E_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \\ & + E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{k}) \end{aligned} \right\} +$$

$$+ \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i(\omega, \mathbf{k}, t) E_j^*(\omega, \mathbf{k}, t)$$

Tisztán monokromatikus esetben E, B nem függ t-től, átmegy a korábbi egyenletbe. Ekkor csak az utolsó tag nem 0. De nem monokromatikus esetben, ha a közeg nem disszipatív, akkor $\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$, és az utolsó tag elhanyagolható, azaz:

$$\frac{1}{V} \overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{1}{V} \frac{dU}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[B_i^* B_i(\omega, \mathbf{k}, t) + E_i^* E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right]$$

$$U := \frac{V}{4\pi} \left[B_i^* B_i + E_i^* E_j \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right]$$

Izotrop esetben:
$$U = \frac{V}{4\pi} \left\{ |(\mathbf{k}\mathbf{E})|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) + |\mathbf{k} \times \mathbf{E}|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left[\varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right] \right\}$$

Következésképpen a termodinamikai egyensúly feltétele:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left(\varepsilon^{tr} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) > 0$$

Ezen feltételek sérülése a negatív energiájú hullám, az instabilitás.
Ui. normál esetben U pozitív.

Fénynyomás

A sugárzás nyomása, a fénynyomás az erősségből számítható:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

A \mathbf{j} -t a Maxwell egyenletekből behelyettesítve: $\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \text{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Felhasználva, hogy $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}\mathbf{E} = 0$

Azt kapjuk, hogy $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \left[(\text{rot}\mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right].$

Felhasználjuk, hogy $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

Az utolsó $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ tag elhanyagolható, mert elektromágneses hullámban időátlagban 0.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} [(\text{rot}\mathbf{B}) \times \mathbf{B} + (\text{rot}\mathbf{E}) \times \mathbf{E}].$$

Az x tengely mentén terjedő elektromágneses hullámra:

$$F_x = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial B_z}{\partial x} B_z + \frac{\partial B_y}{\partial x} B_y + \frac{\partial E_z}{\partial x} E_z + \frac{\partial E_y}{\partial x} E_y \right] = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2)$$

Az elektromágneses tér energiáját figyelembe véve:

$$U = \frac{\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2}{8\pi}$$

Az erő: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial t}$

És a sugárzási energiafluxussal, $S=Uc$ –vel:

$$F_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t}$$

Elektromágneses hullámok terjedése közegben

Ha nincs külső forrás, a vákuumbeli hullámok lehetnek $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ alakúak. Vákuumban ω és \mathbf{k} valós, $\omega = kc$.

Közegben a frekvencia és hullámszám közötti $\omega(\mathbf{k})$ összefüggés:
diszperziós egyenlet.

Nem disszipatív közeg $\rightarrow \varepsilon_{ij}$ hermitikus $\rightarrow \omega$ és \mathbf{k} valós
(egyébként komplex).

Maxwell-egyenletek külső forrás nélküli nemtriviális megoldásai:

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{B})_i = -\frac{\omega}{c} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_j$$

$$(\mathbf{k} \mathbf{B}) = 0$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E})_i = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_i$$

$$\mathbf{k}_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_j = 0$$

A \mathbf{B} -t kiküszöbölve \mathbf{E} -re kapunk (homogén) egyenletrendszeret:

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} \mathbf{E}_j = 0.$$

Nem triviális megoldás: $Det = \Lambda = \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0.$

Diszperziós egyenlet, forrásmentes eset.

Izotrop közeg: $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}).$

Az egyenlet szétesik (HF: ennek igazolása): $\mathbf{E}^l \varepsilon^l(\omega, k) = 0$

$$\mathbf{E}^{tr} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) \right] = 0$$

ahol $\mathbf{E}^l = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2}$; $\mathbf{E}^{tr} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^l.$

A diszperziós egyenlet is szétesik: $\varepsilon^l(\omega, k) = 0$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) = 0$$

A longitudinális ill. transzverzális hullámok létezésének feltétele, a közeg saját hullámai. Megoldhatók valós \mathbf{k} esetén a komplex ω -ra (spektrum) ill. valós ω esetén a komplex \mathbf{k} -ra tetszőleges irányban. Ezek megfelelnek a kezdeti- ill. peremérték problémáknak.

Anizotrop közegben a diszperziós egyenlet nem esik szét.

De: kis frekvenciákon az elektromágneses tér közel longitudinális. Ekkor $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$, azaz potenciáltér:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\nabla\Phi(t, \mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\Phi(\omega, \mathbf{k})$$

4. Maxwell-egyenlet $\rightarrow k_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) k_j \Phi(\omega, \mathbf{k}) = 0.$

A diszperziós egyenlet ekkor anizotrop közegben longitudinális hullámot ír le. Ekkor a longitudinális dielektromos állandó:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{k^2} = 0. \quad \text{Izotrop esetben visszkapjuk } \varepsilon^l\text{-t.}$$

Adott sűrűségű közegre a kontinuitás-egyenletből: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0$

$$\rho(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})}{\omega} = \frac{k_i \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_j(\omega, \mathbf{k})}{\omega} = i \frac{k_i \sigma_{ij} k_j}{\omega} \Phi(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{k^2}{4\pi} [\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - 1] \Phi(\omega, \mathbf{k})$$

Ezt a Poisson-egyenletbe:

$$k^2 \Phi(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \rho(\omega, \mathbf{k}) = -k^2 [\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - 1] \Phi(\omega, \mathbf{k})$$

azaz

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{4\pi \rho(\omega, \mathbf{k})}{k^2 \Phi(\omega, \mathbf{k})} = 1 + 4\pi \alpha(\omega, \mathbf{k})$$

ahol α a polarizálhatóság.