

3. előadás

- A plazma saját rezgései, az elektromágneses hullámok diszperziós relációi

Egyszerű plazmamodellek

Közeget ismerni kell a konkrét diszperziós relációkhoz!

-Független részecske modell:

nincs kölcsönhatás, nincs termikus sebességszórás,
 \mathbf{j} és ρ egyes részecskék összegéből.

-Hidrodinamikai modell (MHD):

Másik véglet, nincs különbség ion, elektron stb között,
fenomenologikus mennyiségek.

Fejlődés → kétfolyadék modell
(ion- és elektron-folyadék).

Plazma leírás

Mikroszkopikus leírás (mikroszkopikusan) az egyes részecskéket követi

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}; t) = \sum_{i=1}^N \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)]$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0$$

Plusz Maxwell egyenletek

Kinetikus leírás (nem az egyes részecskéket követi);

eloszlásfüggvényként írja le őket $\mathbf{v}, \mathbf{r}, t$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{f} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \text{"ütközésitag"}$$

Folyadék leírás (átlagol a sebességre; csak \mathbf{r}, t függés, sűrűségeloszlás)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \bar{\mathbf{v}}) = 0$$

$$m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \right) \bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{n_e} \nabla P_e - e(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B})$$

Általános kinetikus plazma-modell

Egyrészecske eloszlásfüggvény: $f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$

$$\int d\mathbf{p} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = N_\alpha(\mathbf{r}, t) \quad \text{normálás}$$

$$\text{átlagok : } \langle \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\int f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \mathbf{v} d\mathbf{p}}{N_\alpha(\mathbf{r}, t)}$$

Ritka gáz, nincs kölcsönhatás (Vlaszov-egyenlet, amikor a Boltzmann egyenlet jobb oldalán az ütközési tag 0) :

$$\frac{df_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0.$$

Feltételezi, hogy a tér adott (Maxwell egyenletekből)

$$\text{Lorentz - erő : } \mathbf{F}_\alpha = e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}$$

A megoldás módszere:

Maxwell-egyenletek

→ **E**, **B** önkonzisztens téregyenletek,

→ ütközésmentes eset.

E, **B** → f_{α} → **E**, **B** stb.

Homogén, izotrop, ütközésmentes plazma dielektromos állandója

Az elektromágneses tulajdonságokat a plazma dinamikai egyenleteiből származtathatjuk.

Legegyszerűbb eset: **izotrop**.

Ritkán ütköznek a részecskék \rightarrow szabad úthossz nagy (gyors vagy kis távolságon lejátszódó folyamatok).

\rightarrow **ütközésmentes plazma** \rightarrow Vlaszov egyenlet.

Homogén, izotrop plazma $\rightarrow f = f|\mathbf{p}|$

Felt.: Maxwell eloszlás (nem degenerált plazma), T_α , N_α

Kezdetben elektromos tér nélkül:

$$f_{0\alpha}(p) = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha T_\alpha}\right).$$

Gyenge elektromágneses teret feltételezve az eloszlásfüggvény perturbációjából meghatározható a dielektromos állandó.

$$f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_{0\alpha}(p) + \delta f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$$

A Vlaszov egyenletből elsőrendben, feltételezve, hogy \mathbf{B} nem végez munkát, azaz $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0$ az eloszlásfüggvény izotrop marad.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (f_{0\alpha} + \delta f_\alpha)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (f_{0\alpha} + \delta f_\alpha) + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} (f_{0\alpha} + \delta f_\alpha) = \\ &= \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \end{aligned}$$

Az első 2 tag a kezdeti feltétel miatt 0, a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ és az utolsó tag másodrendűen kicsi.

$$0 = \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Következmény:

$$0 = \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Linearitás $\Rightarrow \delta f \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ alakú (Fourier)

$$0 = -i\omega \delta f_\alpha + i\mathbf{k}\mathbf{v} \delta f_\alpha + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\Rightarrow \delta f_\alpha = -i \frac{e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}$$

Alapállapot: kvázineutrális

$\mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow$ indukált töltés, áram (perturbáció)

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{p} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \delta f_{\alpha} d\mathbf{p} \\ \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{p} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} \delta f_{\alpha} d\mathbf{p} \\ \mathbf{j}, \rho &\Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}\end{aligned}$$

Ezzel δf -et behelyettesítve az áram Fourier-komponense:

$$\begin{aligned}j_i &= -i \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i E_j \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j, \\ \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= -i \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \\ \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}\end{aligned}$$

Ütközésmentes plazma, töltéssel rendelkező részecskék.

Semleges atomok az elektromágneses folyamatokban ebben az esetben **nem vesznek részt**.

Probléma: a komplex függvény **pólusa**.

Feltételezések: $\delta f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$

$\delta f_\alpha \sim \exp(-i\omega t) \Rightarrow \text{Im}\omega > 0$ Akkor tűnik el ha van imaginárius rész.

→ valós k esetén ω

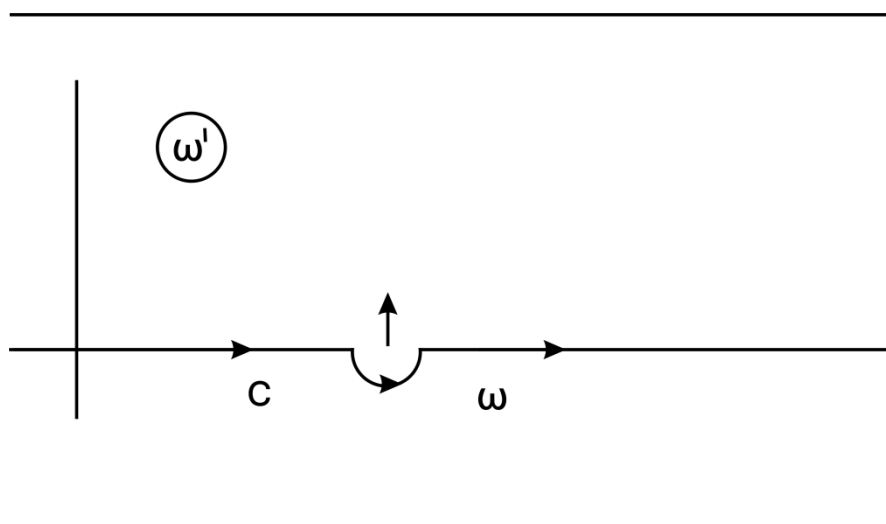
infinitezimálisan

kis komplex részű, pozitív.

Pólus a felső féltérben.

Landau-szabály:

C-szerint alulról kerülni



$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\nu} = \frac{P}{x} - i\pi\delta(x)$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}$$

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} \left[\frac{P}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right]$$

Az első tag a **hermitikus** (valós) rész, a második az **antihermitikus** (imaginárius) rész, ami az elnyelést okozza.

Elnyelés $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} = kv \cos \theta = kv_{\phi}$ (fázissebesség) esetén.

Cserenkov sugárzás, elnyelés:

Izotrop plazmában a disszipáció végbemehet ütközésmentes esetben is!

$v_{\phi} < v \rightarrow$ részecske megelőzheti a fényt

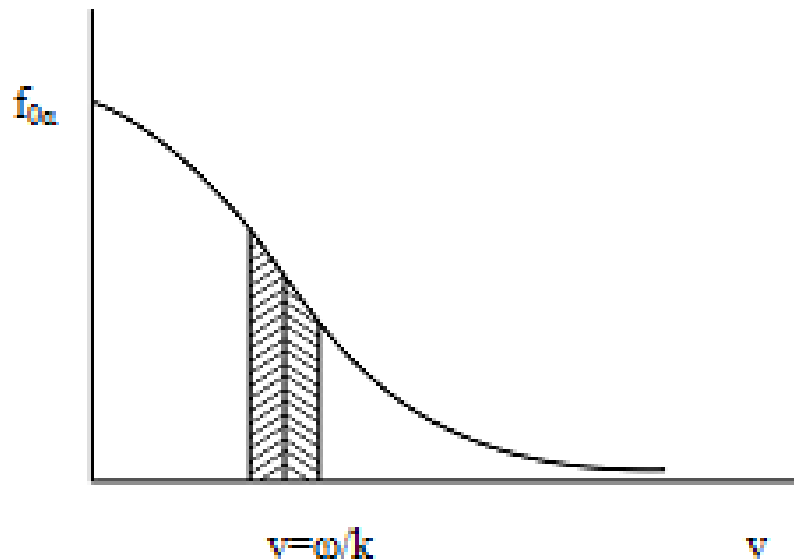
\rightarrow sugárzás szakad le \rightarrow energiát ad a hullámnak.

$v_{\phi} > v \rightarrow$ részecske energiát nyel a hullámból.

A kölcsönhatási sebességintervallum a szögtől függ!

Cserenkov-sugárzás

Maxwell-eloszlás:



- Kevesebb $v_r > v_\phi$ mint $v_r < v_\phi \rightarrow$ elnyelés dominál.
- Elektromágneses hullám akkor erősödik, ha $f_{0\alpha}$ -nak van pozitív meredekségű része!

Izotrop plazma dielektromos állandója

Láttuk: $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}).$

Másfelől: $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} \left[\frac{P}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right]$

Megmutatható (házi feladat), hogy $\varepsilon_{\alpha} = \frac{p^2}{2m_{\alpha}}$ mellett

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varepsilon_{\alpha}},$$

Maxwell-eloszlás \rightarrow
integrál kiszámítható

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varepsilon_{\alpha}}.$$

$$v_{T\alpha}^2 = \frac{2T_{\alpha}}{m} \quad ; \quad \omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{m_{\alpha}}$$

Ezzel: $\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) \right],$

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right).$$

$J_+(x)$ a plazma diszperziós függvény:

$$J_+(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{i\infty}^x d\tau e^{\tau^2/2} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x W\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad W \text{ tabulázott.}$$

Aszimptotikus kifejtések:

$$J_+(x) \cong 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2} \quad (|x| \gg 1, |\operatorname{Re} x| \gg |\operatorname{Im} x|),$$

$$J_+(x) \cong -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \quad (|x| \ll 1),$$

$$J_+(x) \cong -i \sqrt{2\pi} x e^{-x^2/2} \quad (|x| \gg 1, |\operatorname{Im} x| \gg |\operatorname{Re} x|, \operatorname{Im} x < 0)$$

Ebből meghatározható:

- rezgések spektruma
- elektromágneses hullámok terjedésének módja a plazmában

Feltételezzük, hogy nincs degenerált plazmakomponens.

Ütközésmentes, nem degenerált plazma longitudinális rezgései

Emlékeztető: $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$ $d \approx \frac{v_{te}}{\omega_{pe}} = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 N_e}} = r_D$

Izotrop plazma longitudinális diszperziós egyenlete:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) \right] = 0.$$

Sok komplex $\omega(k)$ megoldás létezik.

Gyengén csillapodó rezgések:

a) gyors hullám: $\omega/k \gg v_{Te}, v_{Ti}$ ($x \gg 1$)

$$J_+(x) \cong 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2} \quad x = \omega/kv$$

Feltételezés: gyengén csillapodó, $Re\omega \gg Im\omega$

$$\frac{1}{x_i^2} \ll \frac{1}{x_e^2} \Rightarrow T_i \ll T_e \frac{M}{m} \Rightarrow$$

iontag elhanyagolható, $1/x^2$ -ig sorfejtés:

$$\varepsilon^l(\omega, k) \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{pe}^2}{k^3 v_{Te}^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right) = 0.$$

Csillapodás (exponenciális) gyenge nagy x esetén.

Bevezethető

$\omega \rightarrow \omega + i\delta$ komplex. Ekkor a valós rész:

$$Re \varepsilon^l(\omega, k) \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) = 0.$$

A Debye-hossz: $r_{De} = \frac{v_{Te}}{\omega_{pe}}$

Feltételezve, hogy $\omega \sim \omega_{pe}$:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} \right) = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 r_{De}^2).$$

Elektronplazmahullám

(Langmuir-hullám):

izotrop plazma nagyfrekvenciás
longitudinális rezgései.

$$\frac{\omega}{k} \gg v_{Te} \Rightarrow k^2 r_{De}^2 \ll 1 \Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{k} \gg r_{De}$$

A csillapodás kicsi:

$$\delta = -\frac{\text{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon^l(\omega, k)} \approx -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\omega_{pe}}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2(kr_{De})^2} - \frac{3}{2}\right)$$

Szemléletes magyarázat: a fázissebesség \gg részecskék sebessége

$\omega \sim \omega_{pe}$: csak a nagyon gyors elektronok csillapodnak

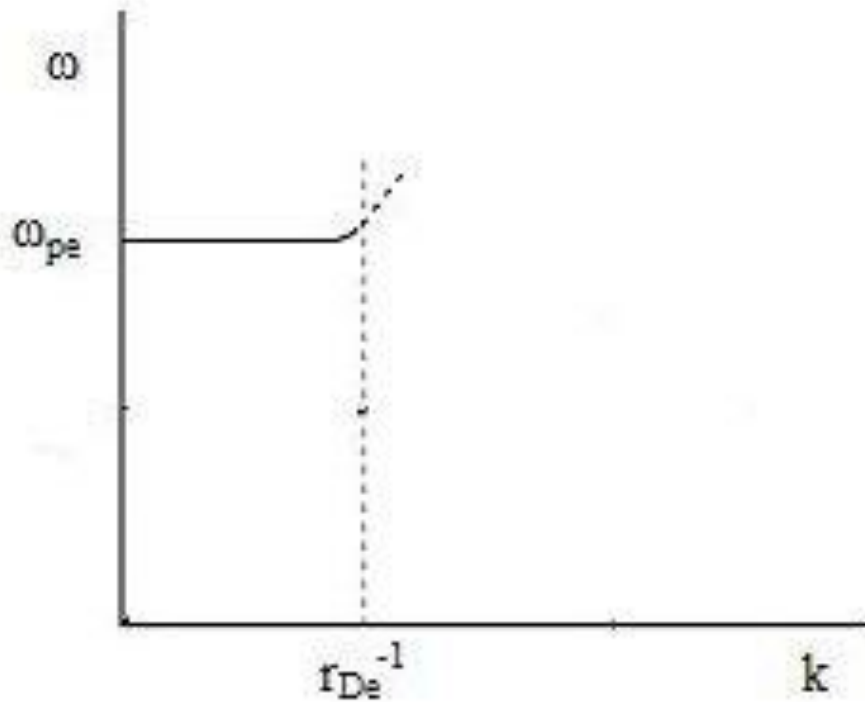
(Landau-csillapodás), a Maxwell-eloszlás farka.

Ha k nő, δ nő,

$$kr_{De} \approx 1 \Rightarrow \delta \rightarrow \omega$$

de a közelítés itt már nem érvényes.

Langmuir hullám diszperziós görbéje



k növelésével a közelítés
érvényét veszíti

Emlékeztető: Plazma diszperziós függvény

$J_+(x)$ a plazma diszperziós függvény:

$$J_+(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{i\infty}^x d\tau e^{\tau^2/2} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x W\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad W \text{ tabulázott.}$$

Aszimptotikus kifejtések:

$$J_+(x) \cong 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2} \quad (|x| \gg 1, |\operatorname{Re} x| \gg |\operatorname{Im} x|),$$

$$J_+(x) \cong -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \quad (|x| \ll 1),$$

$$J_+(x) \cong -i \sqrt{2\pi} x e^{-x^2/2} \quad (|x| \gg 1, |\operatorname{Im} x| \gg |\operatorname{Re} x|, \operatorname{Im} x < 0)$$

b) közbenső fázissebesség: $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$, $Re\omega \gg Im\omega$

$X \ll 1$

$X \gg 1$

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right) = 0.$$

Ha kicsi a csillapodás, az imaginárius rész kicsi, az előző módszerrel:

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[1 + 3k^2 r_{Di}^2 \left(1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \right) \right] \left(1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \right)^{-1}$$

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{M}{m} \frac{1}{Z} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3} \left[1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) \right];$$

$$N_e = Z N_i \quad ; \quad Z = \left| \frac{e_i}{e} \right|$$

Csak nemizotermikus plazmában! ($T_e \gg T_i$)

$$k^2 r_{Di}^2 \ll 1$$

nagy hullámhosszra.

$$r_{Di} \approx \frac{v_{ti}}{\omega_{pi}} = \sqrt{\frac{k_B T_i}{4\pi e^2 N_i}}$$

Spektrum főleg az ionkomponenstől függ!

Ionplazmahullám (kisfrekvenciás).

Határeset (egyszerű):

$$k^2 r_{De}^2 \ll 1$$

Ebben a határesetben:

$$1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \approx \frac{1}{k^2 r_{De}^2}$$

$$\omega^2 \approx \omega_{pi}^2 \left[1 + \frac{3k^2 r_{Di}^2}{k^2 r_{De}^2} \right] \cdot k^2 r_{De}^2 = \omega_{pi}^2 \left[k^2 r_{De}^2 + 3k^2 r_{Di}^2 \right]$$

Mivel

$$r_{Di} = \frac{v_{Ti}}{\omega_{pi}} \quad \text{és} \quad \omega_{pi}^2 = \frac{4\pi Z N e^2}{M}$$

$$\omega^2 = k^2 Z \frac{T_e}{M} \left(1 + 3 \frac{T_i}{Z T_e} \right) = k^2 v_s^2.$$

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega \sqrt{Z \frac{m}{M}} \left[1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{Z T_e}{2 T_i} \right) \right].$$

A normál hang analógiájára definiálható v_s , az **ionhang**:

$$v_s = \sqrt{Z \frac{T_e}{M} \left(1 + \frac{3 T_i}{Z T_e} \right)} \quad \text{ionakusztikus hullám.}$$

Teljesülés feltétele: $|\delta| \ll \omega \Rightarrow \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{Z T_e}{2 T_i} \right) \ll 1$

azaz $Z=1$ -re $T_e/T_i > 6$. Ennyire nemizotermikus kell legyen az ionakusztikus hullám.

Másik határeset: $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ de $k^2 r_{Di}^2 \ll 1$ amikor

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \quad \text{kapjuk.}$$

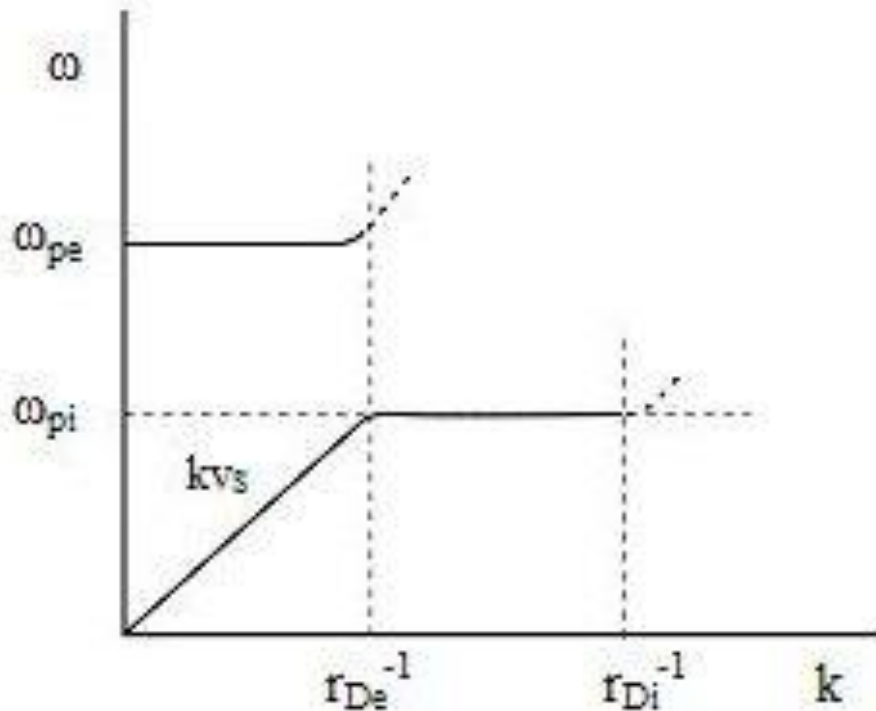
$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} Z \frac{m}{M} \frac{\omega_{pi}}{k^3 r_{De}^3} \left[1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega_{pi}^2}{2k^2 v_{Ti}^2} - \frac{3}{2} \right) \right]$$

erősen nemizotermikus esetben gyenge csillapodás.

Ion Langmuir-rezgés a szabad elektronok okozta negatív tértöltésben történik.

Hasonló ahhoz, ahogy az elektron Langmuir rezgés pozitív ionhátterben végbemegy.

Longitudinális rezgések diszperziós görbéi



Az alsó görbe az ionhullám diszperziós relációja. Észrevehető, hogy az ion Debye-hossz rövidebb az elektron Debye-hossznál.

c) Kisfrekvenciás rezgések: $\omega/k \ll v_{Ti}, v_{Te}$ ($x \ll 1$)

Ez a sztatikus eset, nem hullám, ui.

$$J_+(x) \cong -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \quad (|x| \ll 1)$$

$$\varepsilon_l(\omega, k) \rightarrow \varepsilon_l(0, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} \text{ ahol}$$

$$r_D = \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{r_{D\alpha}} \right)^{-1/2} \text{ a Debye - sugár.}$$

Ekkor a longitudinális hullám leárnyékolódik a Debye-sugáron belül!

Hasonló árnyékolás az ion akusztikus hullámra is:

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te} ; \quad \omega \gg \omega_{pi},$$

$\rightarrow \varepsilon^l$ hasonlóan frekvencia-független $r_{\text{árny}} = r_{Di}$

Ez megfelel a nagyfrekvenciás longitudinális tér árnyékolásának

$\omega_{pi}^2 \ll \omega^2 \ll \omega_{pe}^2$ között (amint az ábra mutatta, abban a frekvencia-tartományban nincs hullám).

Miért? Szemléletesen:

Legyen egy q töltés az $r=r_0$ helyen!

$$\rho_0(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{j}_0 = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0 = 4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$ik_i D_i(0, k) = ik_i \varepsilon_{ij}(0, k) E_j(0, k) = k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, k) \Phi(k) = 4\pi\rho_0(k) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

$$\Phi(k) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, k)},$$

$$k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, k) = k^2 + \frac{1}{r_{\text{árvy}}^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(\mathbf{R}) = \frac{q}{R} e^{-\frac{R}{r_{\text{árvy}}}} \quad \text{lecseng!!}$$

Ez pontosan a longitudinális dielektromos állandó

Transzverzális hullámok ütközésmentes, izotrop plazmában

A diszperziós egyenlet transzverzális része:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) = 0 \quad \text{ahol (láttuk):}$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}} \right) \quad J_+(x) \cong 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2}$$

a) gyors hullámok határeset: $\omega/k \gg v_{T\alpha}$ ($x \gg 1$)

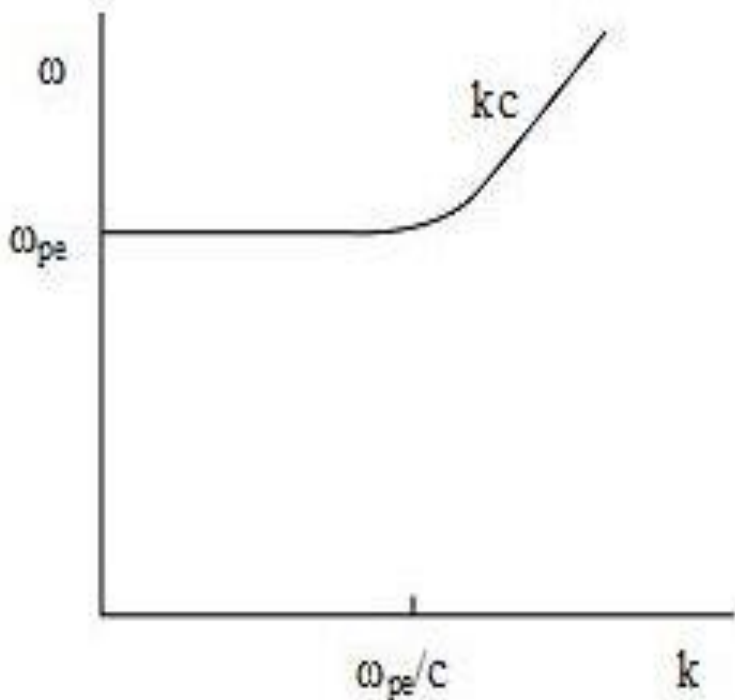
$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr} = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}} \right) \right) \approx k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} + \dots \right) = 0$$

A nagyfrekvenciás hullámok spektruma tehát:

$$\omega^2 \approx k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$$

Az iontag elhanyagolható.

Transzverzális hullámok ütközésmentes, izotrop plazmában



- A fázissebesség nagyobb lehet a közegbeli fénysebességnél!

A spektrum ezért nem függ a részecskék hőmozgásától.

- Az iontag elhanyagolható.
- Az ütközéseket elhanyagolva nincs elnyelés, ui. ε imaginárius része csak $v/c \gg 1$ esetén nem 0, ilyen gyors részecske nincs.
- Nem csillapodó hullám!
- További tulajdonságok:

$$(\omega/k)^2 = c^2/\varepsilon^{tr}, \text{ ezért } \omega/k > c, \text{ ha } \varepsilon_{tr} < 1$$

- *A dielektromos állandó és a törésmutató < 1 !!*

Köv.: A plazmagömb egy szórólencse.

$$\varepsilon^{tr} \cong 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n}{n_c} \quad \left(\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \right)$$

b) $\omega \ll kv_{te}$ **határeset.**

Iontag itt is mindig elhanyagolható:

$$J_+(x) \cong -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \quad (|x| \ll 1)$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) \approx 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega k v_{Te}}$$

Ezzel a spektrum:

$$\omega = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k^3 c^2 v_{Te}}{\omega_{pe}^2}$$

Tisztán képzetes \rightarrow csillapodó rezgés.
 \rightarrow célszerűbb $k(\omega)$ -ra, a
behatolási mélységre megoldani:

$$\lambda_{sk} = \frac{1}{\text{Im}k} = 2 \sqrt[6]{\frac{2}{\pi} \left(\frac{c^2 v_{Te}}{\omega \omega_{pe}^2} \right)^{1/3}}$$

Skin-mélység $\sim \omega^{1/3}$

A disszipáció itt Cserenkov-elnyeléssel történik. Általános,
ütközéses eset: $\lambda_{sk} \sim \omega^{1/2}$. **Ütközésmentes: Anomális skin-effektus.**

$\omega \rightarrow 0$ esetén $\lambda_{sk} \rightarrow \infty$. Az alacsonyfrekvenciás tér mélyen behatol!

Ez ellenkezője annak, mint ahogy a longitudinális tér a Debye-hosszon
árnyékolódik.

Visszatérés az inverz fékezési sugárzásos abszorpcióhoz

Láttuk: A klasszikus vagy ütközéses inverz fékezési sugárzás a leggyakrabban domináns. A transzport egyenlet teljes megoldása helyett „belecsempésszük” az ütközéseket.

Elektron-ion ütközések (ion nélkül nem teljesül egyidejűleg az energia- és impulzus-megmaradás):
A lézertérben oszcillálva impulzus-átadó ütközések
→ a lézernyaláb csillapodik, ez fűti a plazmát:
→ ν_E csillapítási tényező:

$$\nu_E \left(\frac{E_l^2}{8\pi} \right) = \nu_{ei} \frac{n_e m v_{os}^2}{2} = \nu_{ei} \frac{n_e}{2} m \left(\frac{eE_l}{m\omega} \right)^2$$

Behelyettesítve az $\omega_p = 4\pi e^2 n_e / m_e$ plazmafrekvenciát:

$$\nu_E = \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \nu_{ei} = \left(\frac{n_e}{n_c} \right) \nu_{ei}$$

Ismét: Az elektron-ion ütközési frekvencia:

$$\nu_{ei} \cong n_i \sigma v_{te}$$

- ahol v_{te} az elektron termikus sebessége, n_i az ionsűrűség.
- A hatáskeresztmetszet, $\sigma \approx \pi b^2$, ahol b a legkisebb e-i távolság:

$$\frac{Ze^2}{b} \cong \frac{1}{2} m v_{te}^2$$

amiből b -t kiküszöbölve

$$\nu_{ei} \propto n_i \left(\frac{2Ze^2}{m v_{te}^2} \right)^2 v_{te} \propto \frac{n_i Z^2}{T_e^{3/2}} \propto \frac{n_e Z}{T_e^{3/2}}$$

Lézerplazma-kölcsönhatásokban egy adott frekvenciájú lézernyaláb térbeli csillapodása az érdekes. **Most már ismerjük az elektromágneses hullám diszperziós relációját plazmában.**, ebbe teszünk be egy ütközési tagot.

- Módosítjuk a transzverzális hullám diszperziós egyenletét az ütközések figyelembe vételével.

Az ütközésmentes egyenlet:

$$\omega^2 \approx k^2 c^2 + \omega_p^2, \quad \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

A teljes, szigorú levezetés helyett ez átírható

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_{ei})} \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \left(\frac{i\nu_{ei}}{\omega} \right) \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad \text{alakba, feltételezve, hogy}$$

$$\nu_{ei} / \omega \ll 1.$$

Ez megoldható k -ra:

$$k \cong \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \left\{ 1 + i \frac{\nu_{ei}}{2\omega} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{1}{1 - \omega_p^2 / \omega^2} \right\}.$$

A térbeli csillapodást a k imaginárius részéből kaphatjuk:

$$\kappa_{ib} \cong \frac{\nu_{ei}}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\left(1 - \omega_p^2 / \omega^2\right)^{1/2}} \propto \frac{Zn_e^2}{T_e^{3/2} \left(1 - n_e / n_c\right)^{1/2}}.$$

Az abszorpció inverz fékezési sugárzással tehát alacsony hőmérsékleteken, nagy sűrűségeken, nagy rendszámú anyagra erős.

Homogén, L hosszúságú plazmában, $n_e < n_c$ esetén az abszorpció:

$$\alpha_{abs} = 1 - \exp(-\kappa_{ib}L).$$

Gyenge abszorpcióra $\alpha_{abs} \cong \kappa_{ib}L$

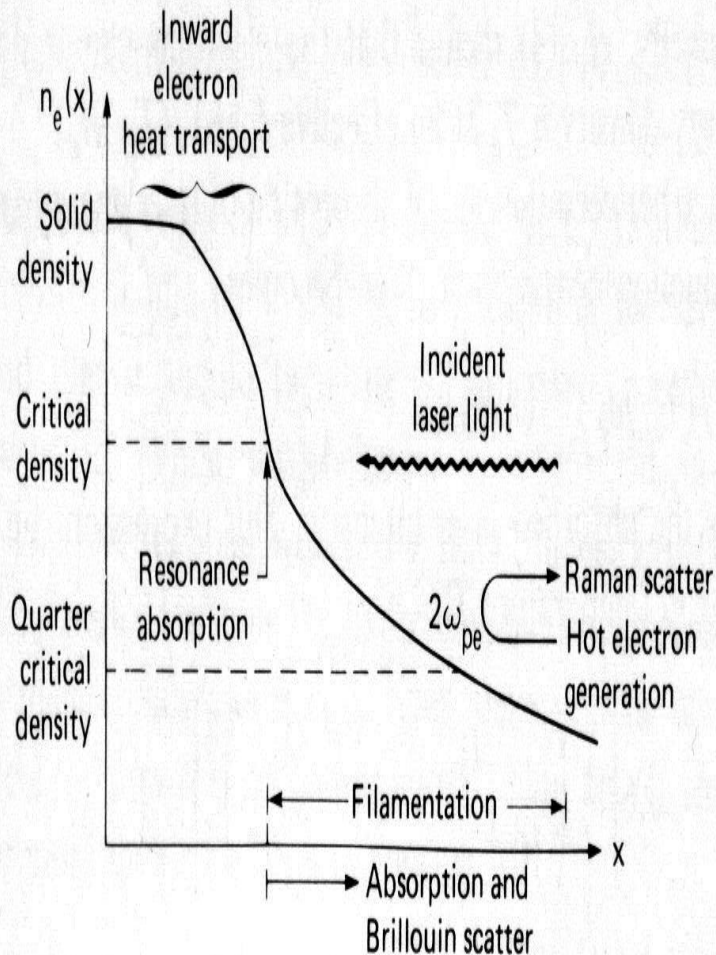
erős abszorpcióra $\alpha_{abs} \rightarrow 1$, azaz lineáris kis abszorpció, telítődik erős abszorpció ill. nagy plazmahossz esetén. Lineáris ($n_e = n_c x/L$) sűrűségprofil esetére Ginzburg meghatározta az L hosszúságú plazmára $n_e = 0$ -tól $n_e = n_c$ -ig és vissza $n_e = 0$ -ig az abszorpciót:

$$\alpha_{abs} = 1 - \exp\left(-\frac{32}{15} \frac{v_{ei}(n_c)}{c} L\right).$$

A sűrűségfüggő faktorok integrálása adja a $32/15$ faktort, míg az ütközési frekvenciát elég a kritikus sűrűségen venni. Ebben az esetben is nagy n_e , kis T_e és nagy L esetén lesz nagy az abszorpció.

Látható, hogy a kritikus sűrűség körül lesz nagy az abszorpció, tehát különösen érzékeny az ottani eloszlásra. Meredek profil (profile steepening) esetén pl. csökkenhet (kicsi lesz az L).

Valódi plazmaprofil



Valódi lézerplazma kölcsönhatásokkor a sűrűségprofil valahogy így néz ki. Adott hullámhosszú lézerre

$$n_c = 1.1 \cdot 10^{21} \left(\frac{1 \mu m}{\lambda} \right)^2 \text{ cm}^{-3}.$$

A hőmérséklet néhány eV az összenyomott szilárdtestben, keV nagyságrendű a koronában. A karakterisztikus sebesség a hangsebesség.

$$v \cong c_s \cong \sqrt{Z T_e / M_i} \quad (n_e = n_c).$$

$$L \cong \min(c_s \tau_L, R_{eff}).$$

Gradiensek, plazma méret: