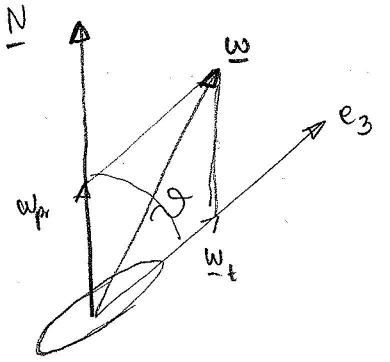
1. Erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgásának geometriai szemléltetése



① $\underline{N}$ = áll. ⇒ z-tengely megválasztása

$$\underline{N} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$$

a pörgettyű szimm. $\underline{\underline{\Theta}} \sim \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$

$$A = B \neq C$$

$\underline{N}, \underline{\omega}, \underline{e}_3$ egy síkban van

$\underline{e}_1, \underline{e}_2$ az $\underline{e}_3$-ra merőleges síkban tetszőleges, megválaszthatók úgy, hogy $\underline{e}_1$ legyen $\underline{N}, \underline{e}_3$ síkjában, $\underline{e}_2$ merőlegesen kifelé.

$\underline{e}_3$ tengely pontjainak a sebessége: $x_3 \underline{e}_3 \times \underline{\omega} \perp \underline{\omega}, \underline{e}_3 \Rightarrow \perp$ a síkra

⇒ ϑ = áll.

$$\dot{\underline{e}}_3 = \underline{\omega} \times \underline{e}_3 = (\underline{\omega}_{pr} + \underline{\omega}_t) \times \underline{e}_3 = \underline{\omega}_{pr} \times \underline{e}_3$$

$\underline{\omega}_t \parallel \underline{e}_3$

$$\left(\begin{array}{ccc} N_3 = \text{áll.} & \Rightarrow & N_\perp = \text{áll.} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \omega_3 = \text{áll.} & & \omega_\perp = \text{áll.} \end{array} \right)$$

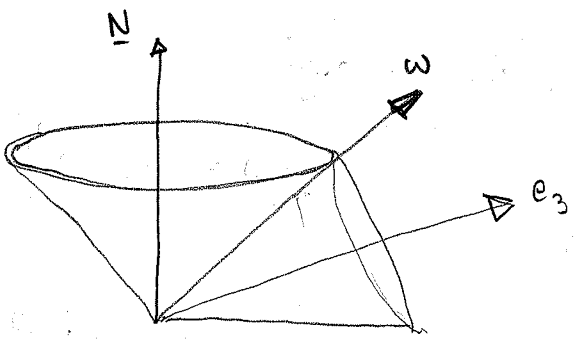
$\underline{\omega} = \underline{\omega}_{pr} + \underline{\omega}_t$

$\underline{e}_3 \parallel \underline{\omega}_t$ forog $\underline{\omega}_{pr}$-val

$\underline{\omega}, \underline{e}_3, \underline{\omega}_{pr}$ egy síkban van, $\underline{e}_3$ és $\underline{\omega}$ közös $\underline{\omega}_{pr}$-ral forog

⇒ $\underline{\omega}, \underline{N}$ szöge állandó ⇒ kúpfelületet írnak le

a ϑ is állandó ⇒ $\underline{\omega}, \underline{e}_3$ szöge is állandó



$\underline{\omega}$ tengely pontjai: az adott pillanatban álló pontok ⇒ $\underline{\omega}_t$-t kényszer határozza meg

(érintkeznek) $\underline{\omega}_t = \underline{\omega} - \underline{\omega}_{pr}$

tehát: két egymáson tisztán gördülő kúp, a külső $\omega_{pr} = \frac{N}{A}$ szögsebességgel halad

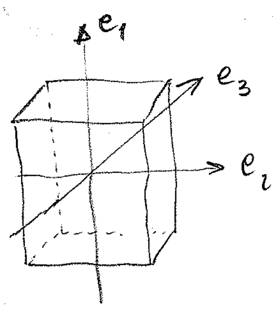
a másik (a szögek a tehetetlenségi momentumok ismeretében, az órán kiszámolt módon) $w_3 = \frac{N_3}{C} = \frac{N \cos\vartheta}{C}$

$$\omega_t = w_3 (1 - \cos\vartheta) = w_3 \left(1 - \frac{C}{A}\right) = w_3 \frac{A-C}{A}$$

az $\underline{N}$ körüli kúp: herpolhodiakúp

$\underline{e}_3$ polhodiakúp

2. Merev test fő tehetetlenségi tengelyek körüli forgásának stabilitása



a főtengelyrendszerben

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$$

feltesszük: $A < B < C$

Az Euler-egyenletek az erőmentes esetben

$$A \dot{\omega}_1 = (B-C)\, \omega_2 \omega_3$$
$$B \dot{\omega}_2 = (C-A)\, \omega_1 \omega_3$$
$$C \dot{\omega}_3 = (A-B)\, \omega_1 \omega_2$$

- linearizációs stabilitásvizsgálat, $\underline{e}_1$ körüli forgás

$\underline{\omega} = \underline{\omega}_0 + \delta \underline{\omega}$ $\quad \underline{\omega}_0 = (\omega_0, 0, 0)$ áll. $\quad \delta \omega = (p, q, r)$

$$A \dot{p} = 0 \qquad \rightarrow p = \text{áll.}$$
$$B \dot{q} = (C-A)\, \omega_0 r$$
$$C \dot{r} = (A-B)\, \omega_0 q$$

így $B\ddot{q} = (C-A)\omega_0 \dot{r} = \underbrace{\omega_0^2 \frac{(C-A)(A-B)}{C}}_{<0} q$

(ui. $C>A$, $B>A$, $C>0$)

ez egy harmonikus rezgés egyenlete $\Rightarrow$ q nem nő, a mozgás stabil

- $\underline{e}_2$ körüli mozgás $\qquad \underline{\omega}_0 = (0, \omega_0, 0) \qquad \delta\underline{\omega} = (p, q, r)$

$$A\dot{p} = (B-C)\omega_0 r$$
$$B\dot{q} = (C-A)\cdot 0 = 0 \qquad \Rightarrow q = \text{áll.}$$
$$C\dot{r} = (A-B)\omega_0 p$$

$$C\ddot{r} = (A-B)\omega_0 \dot{p} = \frac{A-B}{A}(B-C)\omega_0^2 r = \underbrace{\omega_0^2 \frac{(A-B)(B-C)}{A}}_{>0} r$$

$A<B \qquad B<C$

$$\Rightarrow r \text{ nő}, \quad r \sim e^{\lambda t} \qquad \lambda^2 = \omega_0^2 \frac{(A-B)(B-C)}{AC}$$

- $\underline{e}_3$ körüli mozgás $\qquad \underline{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0) \qquad \delta\underline{\omega} = (p, q, r)$

$$A\dot{p} = (B-C)\omega_0 q$$
$$B\dot{q} = (C-A)\omega_0 p$$
$$C\dot{r} = 0 \qquad \Rightarrow r = \text{áll.}$$

$$A\ddot{p} = (B-C)\omega_0 \dot{q} = \omega_0^2 \frac{B-C}{B}(C-A)p$$
$$\ddot{p} = \underbrace{\omega_0^2 \frac{(B-C)(C-A)}{AB}}_{<0} p$$

$B<C \qquad C>A$

ez is rezgés, a mozgás stabil

Összefoglalva:

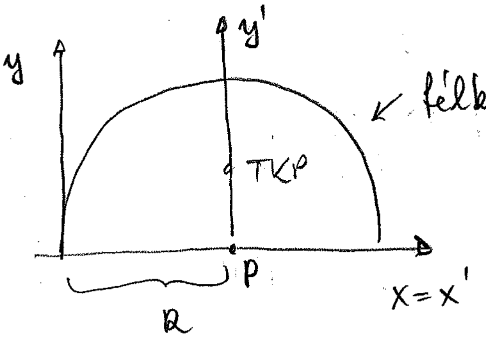
a merev test mozgása a legnagyobb és a legkisebb fő tehetetlenségi nyomatéknak megfelelő tengely körül stabil, a középsőnek megfelelő körül instabil.

3. Példa tehetetlenségi nyomaték számolására

$$\Theta_{ik} = \sum_\ell m_\ell \left(r_\ell^2 \delta_{ik} - x_i^{(\ell)} x_k^{(\ell)} \right)$$

folytonos eloszlás: $m_\ell \sim \rho(r)\, dV$

$$\Theta_{ik} = \int dV\, \rho(r) \left(r^2 - x_i x_k \right)$$



vastagsága elhanyagolható

egyenletes anyageloszlású félkorong

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{2M}{R^2\pi}$$

először meghatározzuk $\underline{\underline{\Theta}}_P =: \Theta'$-t, a P pontra vonatkozó tehetetlenségi momentum tenzort

$$\Theta'_{11} = \int \rho \left(y'^2 + z'^2 \right) dx'dy' = \rho \int \underbrace{dx'\, dy'}_{r'\, dr'\, d\varphi'} y'^2 = \rho \int_0^\pi d\varphi' \int_0^R r' r'^2 \sin^2\varphi'\, dr'$$

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi'\, d\varphi' = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^R r'^3\, dr' = \frac{R^4}{4}$$

ezzel $\Theta'_{11} = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} \frac{R^4}{4} \rho = \frac{MR^2}{4}$

$\rho = \frac{\cancel{2}M}{R^2 \cancel{\pi}}$

$$\Theta_{12} = -\varrho\int x'y'\,dx'dy' = -\varrho\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R dr'r'\; r'\cos\varphi' r'\sin\varphi$$

$$= -\varrho\,\frac{R^4}{4}\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\varphi'\,d\varphi' = \underline{\underline{0}} = \Theta_{21}$$

$$\Theta_{13}' = -\varrho\int x'\underset{\substack{\uparrow\\0}}{z'}\,dx'dy' = 0 = \Theta_{31}$$

$$\Theta_{23}' = -\varrho\int y'\underset{\substack{\uparrow\\0}}{z'}\,dx'dy' = 0 = \Theta_{32}'$$

$$\Theta_{22}' = \varrho\int (x'^2 + \underset{\substack{\uparrow\\0}}{z'^2})\,dx'dy' = \varrho\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^R r'dr'\; r'^2\cos^2\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{R^4}{4}\varrho = MR^2/4$$

$$\Theta_{33}' = \varrho\int (x'^2+y'^2)\,dx'dy' = \varrho\int_0^{\pi} d\varphi'\int_0^R r'dr'\,r'^2 = \varrho\pi\frac{R^4}{4} = M\frac{R^2}{2}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_P = \underline{\underline{\Theta}}' = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\frac{MR^2}{4}$$

Steiner-tétel:

$$\underline{\underline{\Theta}}_A = \underline{\underline{\Theta}}_{TKP} + M\,(\underline{r}_A^2 - \underline{r}_A \circ \underline{r}_A)$$

ahol $\underline{r}_A$: az A pontból a TKP-ba mutató vektor

TKP helye:

$$\frac{\int\varrho\,dx'dy'\,y'}{\underbrace{\int\varrho\,dx'dy'}_{M}} = \frac{\varrho\int_0^{\pi}d\varphi'\int_0^R r'dr'\,r'\sin\varphi}{\varrho\int_0^{\pi}d\varphi'\int_0^R r'dr'} = \frac{\varrho\frac{R^3}{3}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}}{\frac{1}{2}\varrho R^2\pi} =$$

$$= \frac{4}{3\pi}R$$

$$\underline{r}_P = \left(0,\ \frac{4}{3\pi}R,\ 0\right) \qquad x_P^2 = \frac{16}{9\pi^2}R^2$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_{TKP} = \underline{\underline{\Theta}}_P - M\,(\underline{r}_P^2 - \underline{r}_P\circ\underline{r}_P)$$

$$\underline{\underline{\theta}}_{TKP} = M\frac{R^2}{4}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix} - M\left[\frac{16}{9\pi^2}R^2\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} - \frac{16}{9\pi^2}R^2\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix} - M\frac{16}{9\pi^2}R^2\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_0 = \left(R, \frac{4}{3\pi}R, 0\right) \qquad \mathbb{1} = I = \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\theta}}_0 = \underline{\underline{\theta}}_{TKP} + M\left(\underline{r}_p^2\,\mathbb{1} - \underline{r}_0 \circ \underline{r}_0\right)$$

$$\underline{\underline{\theta}}_0 = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix} + \overbrace{MR^2\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} + M\frac{16}{9\pi^2}R^2\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}}^{\underline{r}_p^2}$$

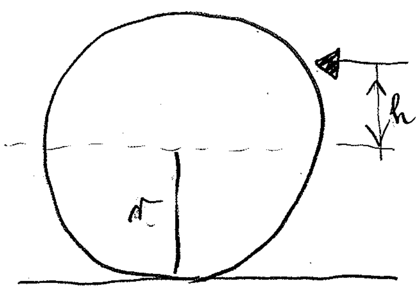
$$\theta_{TKP} \qquad - M\frac{16}{9\pi^2}R^2\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix} - MR^2\underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{4}{3\pi}&0\\ 4/3\pi&16/9\pi^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\underline{r}_0\circ\underline{r}_0}$$

$$= \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&6\end{pmatrix} + M\frac{16}{9\pi^2}R^2\begin{pmatrix}\cancel{0}&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix} - MR^2\begin{pmatrix}1&\frac{4}{3\pi}&0\\ \frac{4}{3\pi}&\frac{16}{9\pi^2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$= MR^2\begin{pmatrix}\frac{5}{4}-1&-\frac{4}{3\pi}&0\\ -\frac{4}{3\pi}&\frac{5}{4}&0\\0&0&\frac{6}{4}\end{pmatrix} = MR^2\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{4}{3\pi}&0\\ -\frac{4}{3\pi}&\frac{5}{4}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

4. Alkalmazás: biliárd

Elm. Fiz. P.T. 12.35: Hol kell egy biliárdgolyót meglökni ahhoz, hogy mozgása során végig csúszásmentesen gördüljön?



- ha a z-tengely körül pörög, akkor csúszik is → középpont alatt/felett érintkezési pont és középpont síkjában

- közelítés: nagy erő, nagyon rövid τ idő alatt. A lökés után a golyó impulzusa és impulzusmomentuma:

$$mv = p = F\tau$$

$$\Theta\omega = N_y = F\tau h$$

Θ számolás az 5. oldalon

csúszásmentesség feltétele: $r\omega = v$

$$v = \frac{F\tau}{m}$$

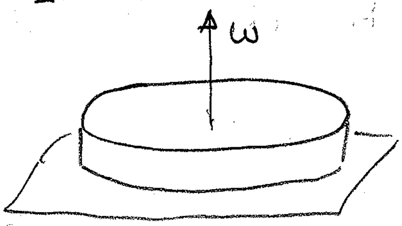
$$r\omega = r\frac{F\tau h}{\Theta}$$

$$\frac{\cancel{F\tau}}{m} = r\frac{\cancel{\tau F} h}{\Theta}$$

$$h = \frac{\Theta}{mr} = \frac{2}{5}r$$

5. Alkalmazás: jégkorong

Elm. Fiz. P.T. 12.33: z-tengely körül forgó korong mozgása sík felületen, súrlódással



R: sugár

M: tömeg

μ: súrlódási együttható

ω_0: szögsebesség kezdetben

súrlódási erő forgatónyomatéka

$$M_z = -\int_0^R dr \cdot \int_0^{2\pi} r\,d\varphi\; r \underbrace{\frac{\mu M g}{R^2\pi}}_{\mu \cdot \text{nyomóerő}} = -\frac{2}{3}\mu M g R$$

impulzusmomentum

függőleges komponensére vonatkozó mozgásegyenlet: $\dot{N}_z = M_z$

$$\underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{\Theta}\dot{\omega} = -\frac{2}{3}\mu M g R$$

$$\dot{\omega} = -\frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}$$

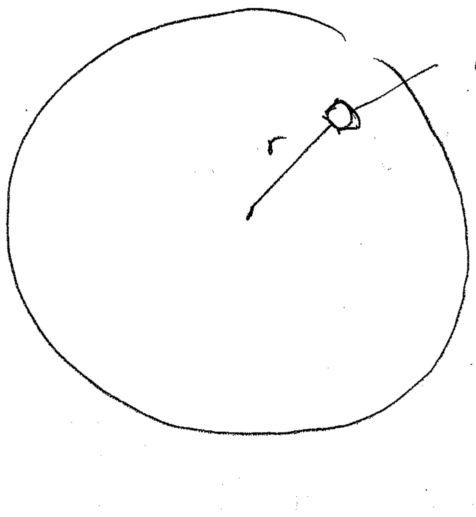
így $\omega = \omega_0 - \frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}t$ mindaddig, amíg ω 0-vá

nem válik

$$T = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$ idő múlva.

$$\iint r\,dr\, r\,d\varphi = 2\pi\int r^2 dr = \frac{2}{3}R^3$$

M_z számolásához



dA felület

$M_z = \int dM$

a nyomóerő Mg

ide eső rész: $dF = \frac{Mg}{A}dA$ $\quad dM = r\,dF$

terület: $A = R^2\pi$

$$\Theta = \int \frac{M}{A} r^2 dA = 2\pi\int_0^R \frac{M}{A}\underbrace{r^2\, r}_{r^3}\,dr = \frac{2\pi R^4}{4}\frac{M}{R^2\pi}$$

$$= \frac{MR^2}{2}$$

gömb tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{11} = \int \varrho (y^2+z^2)\, dV \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$$

- a két tag nyilván azonos
- térbeli polárkoord. $dV = dr\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$z = r\cos\vartheta$$

$$\int z^2\, dV = \int r^2\cos^2\vartheta\; r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int r^4 \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta = \frac{2\pi}{5} R^5 \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}_{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4\pi R^5}{15}$$

így $\int \varrho (y^2+z^2)\, dV = 2 \cdot \frac{\cancel{4}\cancel{\pi} R^{\cancel{5}\,2}}{\underset{5}{15}} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} \frac{M}{\cancel{\pi R^3}} = \frac{2}{5} M R^2$

6. Húrmódusok ortogonalitása

2 végén rögzített húr

előadáson szerepelt: $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$

$$u = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \qquad c_l = c_l(0)\cos(\omega_l t) + \frac{\dot{c}_l(0)}{\omega_l}\sin(\omega_l t)$$

$$\omega_l = c k_l = c\frac{\pi l}{L}$$

állítás volt:

$$c_l(0) = \frac{2}{L}\int u(x,0)\sin\frac{l\pi x}{L}\,dx$$

$$\dot{c}_l(0) = \frac{2}{L}\int \partial_t u(x,0)\sin\frac{l\pi x}{L}\,dx$$

ehhez kell: két különböző

$u_l = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{l\pi x}{L}$ fv ortonormált

$$\langle u_l, u_{l'}\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{l\pi x}{L}\sin\frac{l'\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(l\xi)\sin(l'\xi)\,d\xi =$$

$$\xi = \frac{\pi x}{L} \qquad d\xi = \pi\frac{dx}{L}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(l-l')\xi - \cos(l+l')\xi\right)d\xi = \delta_{ll'}$$

$$\int_0^{\pi}\cos n\xi\,d\xi = \left[\frac{1}{n}\sin n\xi\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq 0 \\ \pi & \text{ha } n = 0 \end{cases}$$

7. Állóhullámok és haladó hullámok

$$u = c_\ell \cdot \sin\left(\frac{\ell \pi x}{L}\right) \qquad c_\ell = c_\ell(0)\cos(\omega_\ell t) + \frac{\dot{c}_\ell(0)}{\omega}\sin(\omega_\ell t)$$

állóhullám

de az egyenleteknek komplex alakú megoldásai is vannak

legyen $\hat{u} = d_\ell e^{i(\omega_\ell t - k_\ell x)}$ $\qquad \omega_\ell = c k_\ell$, $\quad k_\ell = \frac{\pi \ell}{L}$

ez is megoldás, "

$$\tilde{u} = e_\ell e^{i(\omega_\ell t + k_\ell x)}$$

is. A komplex konjugált is megoldás. A valódi (fizikai) megoldás valós $\Rightarrow$ előáll

$$u(x,t) = \sum_\ell \left(d_\ell e^{i(\omega_\ell t - k_\ell x)} + e_\ell e^{i(\omega_\ell t + k x)}\right)$$

alakban.

Azonos fázisú helyek:

$$\omega_\ell t - k_\ell x = \text{const.} \qquad \omega_\ell t + k x = \text{const.}$$

"t nő, x csökken"

balra halad $\qquad$ jobbra halad

állóhullámok is felbonthatók haladó hullámok szerint,

és persze fordítva

pl. $$\cos(\omega_e t)\sin(k_e x) = \frac{e^{i\omega_e t}+e^{-i\omega_e t}}{2}\,\frac{e^{ik_e x}-e^{-ik_e x}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{i(\omega_e t+k_e x)} - e^{i(\omega_e t-k_e x)}\right)$$

$$\underbrace{+\frac{1}{4i}\left(-e^{-i(\omega_e t+k_e x)} + e^{-i(\omega_e t-k_e x)}\right)}_{\text{az első tag komplex konjugáltja}}$$

$$\sin(\omega_e t)\sin(k_e x) = \frac{e^{i\omega_e t}-e^{-i\omega_e t}}{2i}\,\frac{e^{ik_e x}-e^{-ik_e x}}{2i}$$

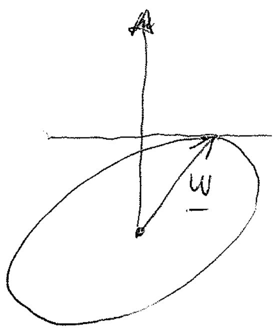
$$= -\frac{1}{4}\left(e^{i(\omega_e t+k_e x)} - e^{i(\omega_e t-k_e x)}\right)$$

$$\underbrace{-\frac{1}{4}\left(e^{-i(\omega_e t+k_e x)} - e^{-i(\omega_e t-k_e x)}\right)}_{\text{az első tag komplex konjugáltja}}$$

az elsőben a balra/~~jobbra~~terjedő hullám

$$\cos(\omega_e t)\sin(k_e x) = \underbrace{\frac{1}{2}\sin(k_e x+\omega_e t)}_{\text{balra terjed}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin(k_e x-\omega_e t)}_{\text{jobbra terjed}}$$

Kiegészítés az 1. ponthoz: Poinsot-szerkesztés



erőmentes pörgettyű: csak kin. erg.

$$E = K = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$$

ez egy ellipszoid egyenlete; a test tehetetlenségi rendszerében

$$\underline{\underline{\Theta}}_T = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\underline{\omega}_T\,\underline{\underline{\Theta}}_T\,\underline{\omega}_T = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right)$$

Az $\underline{\omega}$ pontban berajzolt érintősík egyenletéhez:

normálvektor: $\nabla_{\underline{\omega}} K = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} = \underline{N} =$ áll.

$\underline{\omega}$ vetülete a normálvektorra: $\underline{N} =$ áll. $|\underline{N}| =$ áll.

$$\frac{\underline{N}}{|\underline{N}|}\underline{\omega} \qquad \underline{N}\,\underline{\omega} = (\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega})\cdot\underline{\omega} = \underline{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} = 2E = \text{áll.}$$

tehát a vetület is állandó $\Rightarrow$ az érintősík időben nem változik

az érintési pont $\underline{\omega}$ pill. forgástengely $\Rightarrow$ álló pont

az ellipszoid gördül az érintősíkon

$\uparrow$

invariábilis sík