A zárthelyi feladatok megoldása

1. Csavarmozgás-invariáns potenciál

1. $L = K - V$ $K = \frac{1}{2} m \underline{v}^2$ V: potenciál; invariáns a z

$$\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{\underline{O}}(\varphi)\,\underline{r} + \varphi \kappa \underline{k}$$

transzformációra. A trf.-nak megfelelő megmaradó mennyiség keresése:

infinitezimális alak

$$\delta \underline{r} = \delta\varphi\, \underline{k} \times \underline{r} + \delta\varphi\, \kappa\, \underline{k}$$

deriválva

$$\delta \underline{v} = \delta\varphi\, \underline{k} \times \underline{v}$$

így a Lagrange-fv. megváltozása (kell: $\delta L = 0$)

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \underline{r}} \delta \underline{r} + \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} \delta \underline{v}$$

Euler-Lagrange-egyenletek: $\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}}$ $\underline{\dot{p}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{r}}$, így

$$\delta L = \underline{\dot{p}}\, \delta \underline{r} + \underline{p}\, \delta \underline{v} = \frac{d}{dt}\left(\underline{p}\, \delta \underline{r}\right) \Rightarrow \boxed{\underline{p}\, \delta \underline{r} = \text{áll.}}$$

ennek átalakításával kapjuk a mozgásállandót:

$$\underline{p}\, \delta \underline{r} = \delta\varphi \left\{ \underline{p}\,(\underline{k} \times \underline{r}) + \kappa\, \underline{k}\, \underline{p} \right\} = \delta\varphi\, \underline{k}\left(\underline{r} \times \underline{p} + \kappa \underline{p} \right)$$

hármasszorzat
cikl. perm.-ra inv.

ez tetsz. (infinitezimális) $\delta\varphi$-re állandó; így $\delta\varphi$ szerint deriváltja is:

a mozgásállandó $\boxed{\underline{k}\left(\underline{r} \times \underline{p} + \kappa \underline{p} \right) = N_z + \kappa p_z = \text{áll.}}$

Poisson-zárójel (0-nak kell lennie)

$$H = -L + \underline{p}\,\underline{\dot q} = \frac{p^2}{2m} + V$$

$$\{N_z + \kappa p_z, H\} = \{x p_y - y p_x + \kappa p_z, H\}$$

$$N_z = (\underline{r} \times \underline{p})_z = m(x p_y - y p_x)$$

tudjuk: $\{f, H\} = \dot f$ így $\{N_z + \kappa p_z, H\} = 0$ -t kell kapnunk

$$\{x p_y - y p_x + \kappa p_z, H\} = \{x, H\} p_y + x\{p_y, H\} + y\{p_x, H\} - p_x\{y, H\} =* $$
$$+ \kappa\{p_z, H\}$$

$\{x, H\} = \dot x = \frac{p_x}{m}$ $\{y, H\} = \frac{p_y}{m}$ a K alakjából, $\{p_y, H\} = \dot p_y = \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$

$$* = \frac{p_x}{m} p_y + x\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) - y\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) - p_x \frac{p_y}{m} + \kappa\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) =$$

$$\underline{k} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad = (\cancel{\underline{k} \times \underline{r} + \kappa \underline{k}})\,\nabla \underline{V} = 0$$

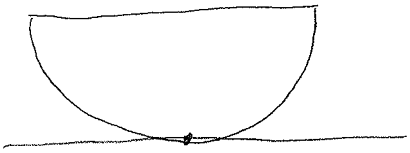
hiszen $\underline{V}$ invariáns az

$\underline{r} \to \underline{r}' = \underline{\underline{O}}(\varphi)\,\underline{r} + \kappa \varphi \underline{k}$ transzformációra

$$V(\underline{\underline{O}}(\varphi)\,\underline{r} + \kappa \varphi \underline{k}) = V(\underline{r})$$, ezt φ szerint deriválva $\varphi = 0$-ban

$$(\underline{k} \times \underline{r} + \kappa \underline{k})\,\nabla \underline{V}(\underline{r}) = 0$$

2. Félhenger mozgása



tömeg: $M = \frac{\pi R^2}{2} \varrho \ell$

tehetetlenségi momentum

$$\Theta_g = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\Theta_{TKP} = \frac{1}{2} M R^2 - a^2 M$$

ahol a a TKP távolsága a geometriai középponttól, $a = \frac{4}{3\pi} R$

ahonnan a Steiner-tétel alkalmazásával

$$\Theta_{TKP} = \frac{1}{2} M R^2 - \left(\frac{4}{3\pi} R\right)^2 M = \frac{1}{2} M R^2 \left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right)$$

TKP helye: (gördül)

$$x = -R\varphi + a \sin\varphi \Rightarrow \dot{x} = -R\dot{\varphi} + a\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$y = a(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \dot{y} = a \sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

így a teljes Lagrange-fv $L = K - V$, $K = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2$

$$V = Mgy = Mga(1 - \cos\varphi)$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\Theta\dot{\varphi}^2 + Ma^2 \sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + M(-R\dot{\varphi} + a\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2\right) - Mga(1 - \cos\varphi)$$

egyszerűsítve:

$$L = \frac{1}{2}\left[\Theta + M(R^2 - 2Ra\cos\varphi + a^2)\right]\dot{\varphi}^2 - Mga(1 - \cos\varphi)$$

egyensúlyi helyzet: $\varphi = 0$, sorfejtés φ-ben másodrendig

$$L \approx \frac{1}{2}\underbrace{\left[\Theta + M(R^2 - 2Ra + a^2)\right]}_{\hat{\Theta}}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} Mga\varphi^2$$

$$\hat{\Theta} = \Theta + M(R-a)^2 = \frac{1}{2} M R^2 \left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right) + M\left(R - \frac{4\pi}{3} R\right)^2 = MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)$$

rezgési frekvencia: összevetés a harmonikus oszcillátorral $H = \left[\frac{p^2}{2m} + m\frac{\omega^2}{2}x^2\right]$

$L = m\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right]$

$$\omega^2 = \frac{\varphi^2 \text{ együtthatója}}{\dot{\varphi}^2 \text{ együtthatója}} = \frac{Mga}{\hat{\Theta}} =$$

$$= \frac{Mg\frac{4}{3\pi}R}{MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)} = \frac{g}{R}\,\frac{4/3\pi}{3/2 - 8/3\pi}$$

(Mj: a feladatot meg lehet oldani tökéletes csúszás esetén is, akkor a tkp vízszintesen nem mozdul el, $x = \text{const}$, $\dot{x} = 0$; de ez nagyon nem reális)

3. Gömb és kocka összehasonlítása

		Gömb		Kocka
tömeg :	$M =$	$\frac{4\pi}{3} r^3 \varrho_g$	$\overset{!}{=}$	$a^3 \varrho_k$
teh. mom :	$\Theta =$	$\frac{2}{5} M r^2 = \frac{8}{15} \pi \varrho_g r^5$	$\overset{!}{=}$	$\frac{1}{6} M a^2 = \frac{1}{6} \varrho_k a^5$

a két tömeg azonosságát felhasználva:

$$\Theta = \frac{2}{5} M r^2 = \frac{2}{5} \cdot a^3 \varrho_k r^2 = \frac{1}{6} \varrho_k a^5$$

ahonnan $\quad r^2 = \frac{5}{12} a^2 \qquad r = \sqrt{\frac{5}{12}}\, a \qquad \boxed{\frac{a}{r} = \sqrt{\frac{12}{5}}}$

ezt a tömegek egyenlőségét kifejező egyenletbe visszahelyettesítve

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^{3/2} a^3 \varrho_g = a^3 \varrho_k$$

ahonnan $\quad \varrho_g = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{12}{5}\right)^{3/2} \varrho_k \quad$ ill. $\quad \boxed{\frac{\varrho_k}{\varrho_g} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^{3/2}}$

A gömb Θ-jának és a kocka Θ-jának kiszámolása: a definíció alapján, integrálással.

4. Tehetetlenségi momentum számolása

m_i	x_i	y_i	z_i	$m_i x_i$	$m_i y_i$	$m_i z_i$	Θ_{xx} $m(y^2+z^2)$	Θ_{xy} $-mxy$	Θ_{xz} $-mxz$	Θ_{yy} $m(x^2+z^2)$	Θ_{yz} $-myz$	Θ_{zz} $m(x^2+y^2)$
1	−2	2	0	−2	2	0	4	4	0	4	0	8
2	2	1	0	4	2	0	2	−4	0	8	0	10
2	−1	−2	0	−2	−4	0	8	−4	0	2	0	10
M = 5				0	0	0	14	−4	0	14	0	28

TKP : origó

így tehát

$$\underline{\underline{\Theta}} = mb^2 \begin{pmatrix} 14 & -4 & 0 \\ -4 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

Fő tehetetlenségi nyomatékok: és irányok:

$C = 28\,mb^2 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B = 18\,mb^2 \longleftarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = 10\,mb^2 \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(14-\lambda)(14-\lambda) - 16 = 0 \qquad 180 - 28\lambda + \lambda^2$$

$\lambda_1 = 18$

$\lambda_2 = 10$

$$\underline{\underline{\Theta}} - 10mb^2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} mb^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sajátvektor}$$

$$\underline{\underline{\Theta}} - 18mb^2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & \\ -4 & -4 & \\ & & 10 \end{pmatrix} mb^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sajátvektor}$$

5. Köralakú membrán deformációja a saját súlya hatására

a membrán deformációját leíró egyenlet egyensúlyban

$$\sigma \Delta \underline{u} + \underline{F} = 0$$

$$\sigma \Delta \underline{u} = -\underline{F} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varrho g \end{pmatrix}$$

feltesszük: $\underline{u} = u(r)\,\underline{e}_z$; áttérünk polárkoordináták használatára:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

nincs szögfüggés

$$\Delta \underline{u} = \Delta u \cdot \underline{e}_z = u'' + \frac{1}{r} u' = \frac{1}{r}(r u')'$$

a kapott egyenlet

$$\frac{1}{r}(r u_z')' = \frac{\varrho g}{\sigma}$$

integrálva

$$(r u')' = \frac{\varrho g}{\sigma} r$$

$$r u' = \frac{\varrho g}{2\sigma} r^2 + c_1$$

$$u' = \frac{\varrho g}{2\sigma} r + \frac{c_1}{r}$$

ismét integrálva:

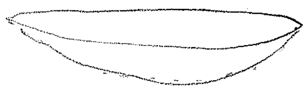
$$u = \frac{\varrho g}{2\sigma}\frac{r^2}{2} + c_1 \ln r + c_2$$

origóbeli regularitás: $u(r=0)$ véges

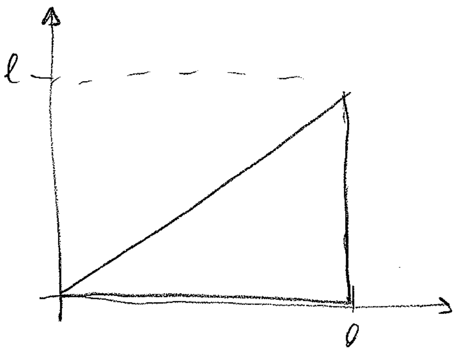
$$\Rightarrow c_1 = 0$$

határfeltétel a rögzített peremen: $u(r=R) = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{\varrho g}{4\sigma} R^2$

$$\boxed{u(r) = \frac{\varrho g}{4\sigma}(r^2 - R^2)}$$



6. σ előfeszítésű egyenlőszárú derékszögű Δ-membrán rezgései



$$\ddot{u} + c^2 \Delta u = 0$$

a négyzetalakú membrán sajátmódusai

$$\sin(\omega t)\boxed{\sin(m\xi)\,\sin(n\eta)} \qquad \omega^2 = c^2(n^2+m^2)\frac{\pi^2}{\ell^2}$$

$$\xi = \frac{\pi x}{\ell} \qquad \eta = \frac{\pi y}{\ell}$$

ha tekintjük az

$$f_{nm} = \left\{ \sin(m\xi)\sin(n\eta) - \sin(n\xi)\sin(m\eta) \right\} \sin(\omega t)$$

függvényt, akkor jól látható, hogy

$$\Delta f_{nm} = \frac{\pi^2}{\ell^2}(n^2+m^2)\, f_{nm}$$

azaz $\ddot{u} - c^2 \Delta u = 0$ $\quad u = f_{nm}$-re teljesül $\Rightarrow$ ez is sajátf.

Az $x = y$ egyenes mentén

$$f_{nm}(x=y) = \sin(\omega t)\left\{ \sin(m\zeta)\sin(n\zeta) - \sin(n\zeta)\sin(m\zeta) \right\} = 0$$

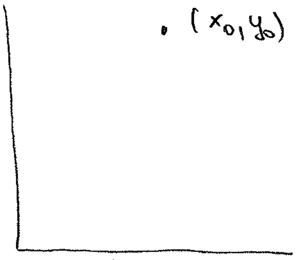
$x = y \Rightarrow \xi = \eta = \zeta$ $\qquad$ a határfeltétel teljesül

<u>Spektrum</u>: a lehetséges frekvenciák halmaza azonos:

$$\omega^2 = c^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}(n^2+m^2) \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

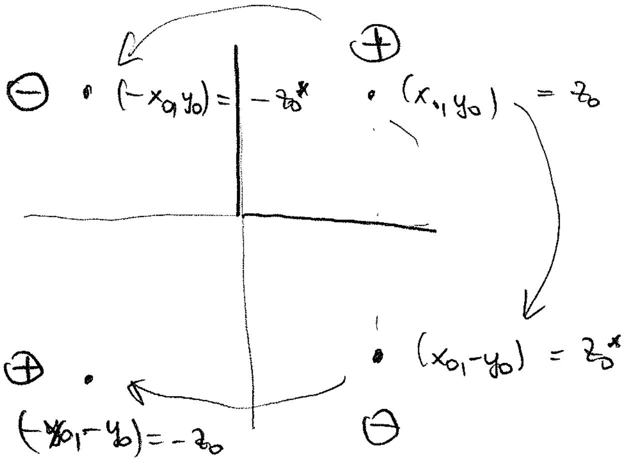
de most $\sin(m\xi)\sin(n\eta)$ és $\sin(m\eta)\sin(n\xi)$ együtthatója egymás ellentettje kell legyen $\Rightarrow$ feleződött a degeneráció (az azonos sajátértékben tart. módusok száma)

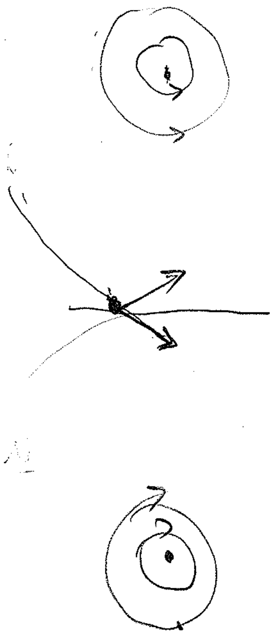
7. Örvény a negyedsíkon



$z = x+iy$

$z_0 = x_0+iy$





fal

sebességmező a fallal $\parallel$-os legyen:

→ kell egy ellentétes cirkulációjú tükör-örvény

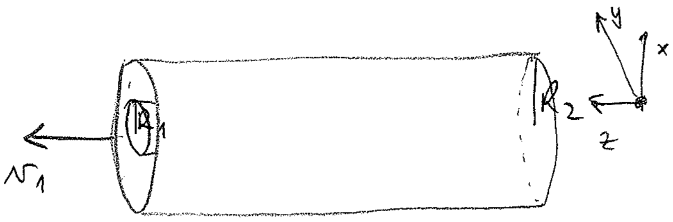
egy ~~forrás~~ örvény komplex sebességpotenciálja

$$f(z) = \frac{q}{2\pi i}\ln(z-z_0)$$

kell tehát:

$$f(z) = \frac{q}{2\pi i}\left[\ln(z-z_0) - \ln(z-z_0^*) + \ln(z+z_0) - \ln(z+z_0^*)\right]$$

8. Áramlás két henger között



határfeltételek:

$$\underline{v}(r=R_1) = v_1 \cdot \underline{e}_z$$

$$\underline{v}(r=R_2) = 0$$

feltételezzük, hogy $\underline{v}(\underline{r}) = v(r) \cdot \underline{e}_z$

és felírjuk a Navier-Stokes-egyenleteket hengerkoordinátákban (hasonlóan a Hagen-Poiseuille-áramlás esetéhez):

$$\dot{\underline{v}} + (\underline{v}\nabla)\underline{v} = \underline{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{\eta}{\varrho}\Delta \underline{v}$$

tegyük fel, hogy a nyomás állandó $\nabla p = 0$, $\underline{f} = 0$

$$(\underline{v}\nabla)\underline{v} = v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0$$

így adódik: $\frac{\eta}{\varrho}\Delta \underline{v} = 0 \Rightarrow \Delta \underline{v} = 0 \Rightarrow \Delta v = 0$

$$\Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \text{szögf.}\right) v(r) = \frac{1}{r}(r v(r)')'$$

$$\frac{1}{r}(r v')' = 0$$

$$(r v')' = 0$$

integrálva

$$r v' = c_1$$

$$v' = c_1 / r$$

integrálva

$$v(r) = c_1 \ln r + c_2$$

$r = R_2$-ben $\underline{v} = 0$

$$-c_1 \cdot \ln R_2 = c_2$$

$r = R_1$-ben

$$v(r=R_1) = \underbrace{c_1 \ln R_1 - c_1 \ln R_2}_{} = v_1$$

$$c_1 \ln \frac{R_1}{R_2} = v_1$$

$$c_1 = \frac{v_1}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

kapjuk tehát, hogy $v(r) = \frac{v_1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln r - \frac{v_1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_2 = \frac{v_1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2}$