Elmélet Fizika 1 gyakorlat, 2010. feb. 19. 10^{05} ①

11^{00}

Lukács Árpád

Tudnivalók:

gyakorlat honlapja:

http://www.rmki.kfki.hu/~arpi/teaching/2010elmfiz1/

követelmények

- bejárás
- házi feladatok beadása (1/2 kell, ±1 jegy)

- lesz 2 zárthelyi, előreláthatóan az előadás első felében,

  április 29-én

  és

  május 13-án

- a gyakorlati jegy a 2 zh jegyeiből lesz, ±1 jegy a HF-ek szerint. A gyak. teljesítéséhez mindkét zh ≥ 2 kell. Egyből lehet javítani év végén (javítózh).

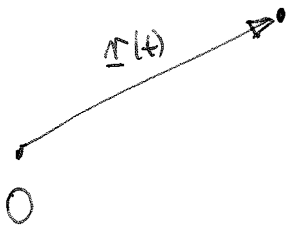
tematika: kb. mint az előadás tematikája (ameddig eljutunk)

irodalom: Budó Á.: Mechanika

Nagy K. (szerk.): Elméleti fizikai példatár 1.

1. Anyagi pont mozgásának leírása

Leírás adott vonatkoztatási rendszerben



helyvektor:
- a kiválasztott origóból mutat a pontba, amelynek a mozgását le kívánjuk írni
- az időtől függ

→ ez egy vektor – skalár – függvény (v.ö.: görbék)

a paraméter: idő (nem ívhossz – fontos különbség a kísérő triéder számolásakor)

A vektor megadása: koordinátákkal

pl. derékszögű koordinátákkal

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

kétféle lehetséges jelölés

a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok:

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vagy $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

így

$$\underline{r}(t) = x(t) \cdot \underline{i} + y(t)\, \underline{j} + z(t) \cdot \underline{k}$$

$$= x_1(t)\, \underline{e}_1 + x_2(t)\, \underline{e}_2 + x_3(t)\, \underline{e}_3$$

<u>sebesség</u> a helyvektor idő szerinti deriváltja

$$\Delta \underline{r} := \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$$

Δt : tetsz. kis időtartam

$$\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{\underline{r}(t+h) - \underline{r}(t)}{h}$$

$$= \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

nagysága : $v(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$

<u>gyorsulás</u> teljesen hasonlóan

$$\underline{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}(t)}{dt} = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$$

<u>Példa</u> :

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z_0 + v_{z0} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{pmatrix}$$

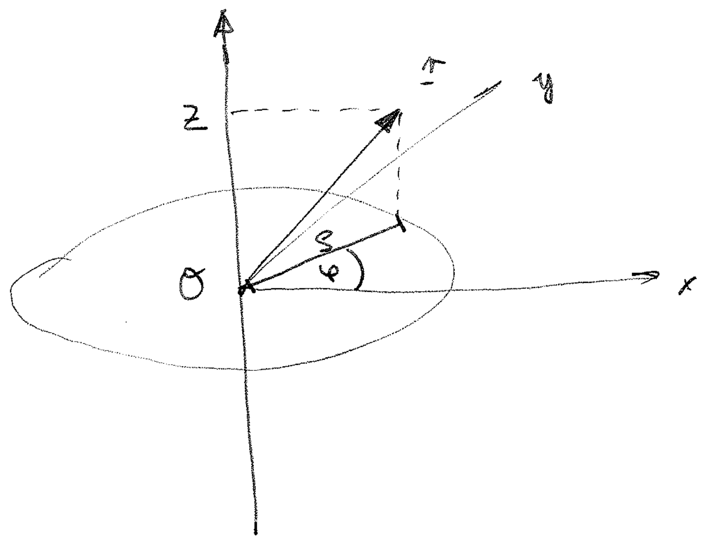
$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} v_{x0} + a_x t \\ v_{y0} + a_y t \\ v_{z0} + a_z t \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ ez az egyenletesen gyorsuló test áttérés hengerkoordinátákra:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right\} \text{Descartes-féle koord. (derékszögű)} \Longleftrightarrow \text{hengerkoord.} \left\{\begin{array}{l} \varrho(t) \\ \varphi(t) \\ z(t) \end{array}\right.$$

áttérési szabály:



$$\left.\begin{array}{l} x = \varrho \cdot \cos\varphi \\ y = \varrho \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{array}\right\} \quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \varrho\cos\varphi \cdot \underline{i} + \varrho\sin\varphi\, \underline{j} + z\,\underline{k}$$

illeszkedő egységvektorok bevezetése

$$\underline{e}_\varrho = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varrho}\right|} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varrho} = \cos\varphi \cdot \underline{i} + \sin\varphi\, \underline{j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_\varphi = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\, \underline{i} + \cos\varphi\, \underline{j} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_z = \underline{k}$$

sebesség számítása: fontos figyelembe venni, hogy az előbb definiált egységvektorok helyfüggőek → összetett fv. deriválása

$$\underline{r}(t) = \varrho(t)\, \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{e}_\varrho(\varrho,\varphi)}}{\underline{e}_\varrho} + z(t)\, \underline{e}_z$$

sebesség

$$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{\varrho}(t)\underline{e}_\varrho + \varrho(t)\, \underset{!}{\dot{\underline{e}}_\varrho} + \dot{z}(t)\, e_z$$

$$\dot{\underline{e}}_\varrho = \underbrace{\frac{\partial \underline{e}_\varrho}{\partial \varrho}}_{0} \dot{\varrho} + \frac{\partial \underline{e}_\varrho}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \underbrace{\frac{\partial \underline{e}_\varrho}{\partial z}}_{0} \dot{z}$$

$$\frac{\partial \underline{e}_\varrho}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_\varphi$$

így $\boxed{\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{\varrho}(t)\, \underline{e}_\varrho + \varrho(t)\, \dot{\varphi}(t)\, e_\varphi + \dot{z}(t)\, e_z}$

$$v^2(t) = |\underline{v}(t)|^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

ui. $\underline{e}_\varrho, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$ ortonormáltak

gyorsulás teljesen hasonlóan, ui.

$$\frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varrho} = 0 \qquad \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{e}_\varrho$$

így

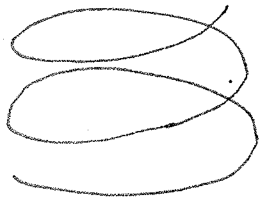
$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \ddot{z}(t)\,\underline{e}_z + \ddot{\rho}(t)\,\underline{e}_\rho + 2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t)\,\underline{e}_\varphi$$

$$+\rho\,\ddot{\varphi}(t)\,e_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\,\underline{e}_\rho$$

2. Példa ívhossz-számításra

spirális

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ v_z t \end{pmatrix}$$



ívhossz = ?

$$ds = v(t)\,dt$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$v^2(t) = |\underline{v}(t)|^2 = R^2\omega^2\underbrace{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)}_{1} + v_z^2 = R^2\omega^2 + v_z^2$$

$$ds = \sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2}$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t ds = s(0) + \int_0^t v(t)\,ds = \underline{s(0) + \sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2}\;t}$$

3. Anyagi pont dinamikája

EZ MÁR NEM VOLT!

előadáson szerepeltek a Newton-axiómák

itt most a végeredményként kapott alakot, a mozgásegyenletet fogjuk felhasználni:

a testet leírja: $\underline{r}(t)$ vektor-skalár-függvény

kinematika: $\underline{r}(t)$ – $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t)$ – $\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a}(t)$

kapcsolata

dinamika $\boxed{m\,\underline{a} = \underline{F}}$ mozgásegyenlet

$$m\,\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

ez az erőtörvénnyel kiegészítve: $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$

egy differenciálegyenlet (rendszer)

koordinátákban:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned}\right\}$$ három változós, másodrendű differenciálegyenlet-rsz.

$3 \times 2 = 6$ kezdeti adat szükséges (kezdőfeltételek), pl.

$t = t_0$-ban $\underline{v}(t_0) = \underline{v}_0$ $\underline{r}(t_0) = \underline{r}_0$

speciális eset: ha $\underline{F} = \underline{F}(t)$ csak az idő függvénye
("adott külső" erő hatása alatt mozgó test")

$$m\,\underline{\ddot{r}}(t) = \underline{F}(t)$$

$$\underline{\ddot{r}}(t) = \frac{1}{m}\underline{F}(t) = \underline{f}(t)$$

ezt az egyenletet integráljuk:

$$\underline{\dot{r}}(t) = \underbrace{\underline{\dot{r}}(t_0)}_{\underline{v}_0} + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(t')\,dt'$$

ez is egy hasonló típ. differenciálegyenlet; integráljuk

$$\underline{r}(t) = \underbrace{\underline{r}(t_0)}_{\underline{r}_0} + \int_{t_0}^{t} \underline{\dot{r}}(t')\,dt'$$

$$= \underline{r}_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \underline{v}_0\,dt'}_{\underline{v}_0(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\,\underline{f}(t'')$$

Példa: "ferdehajítás" - gravitációs térben mozgó test

↑ állandó

$$\underline{F} = m\underline{g} \qquad \underline{g} = -g\underbrace{\underline{k}}_{\underline{e}_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \frac{1}{m}\underline{F} = \underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

a differenciálegyenlet:

$$m\ddot{\underline{r}} = m\underline{g}$$

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{g}$$

koordinátákban

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_{x0} + 0 \\ \dot{y}(t) &= v_{y0} + 0 \\ \dot{z}(t) &= v_{z0} + \int_{t_0}^{t} (-g)\,dt' \\ &= v_{z0} - g(t-t_0) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_{x0}\,dt' = x_0 + v_{x0}(t-t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t-t_0)$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} (v_{z0} - g(t'-t_0))\,dt'$$

$$= z_0 + v_{z0}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

Milyen görbe ez?

a koordinátarsz-t alkalmasan választva

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

$V_{y0} = 0$ (irány) $\qquad$ $V_{z0} = 0$ (sebesség)

$$x(t) = v_{x0}\,(t - t_0)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,(t - t_0)^2$$

$$(t - t_0)^2 = \left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right)^2 = -\frac{2\,z(t)}{g}$$

azaz
$$\frac{2\,z(t)}{g} + \left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right)^2 = 0$$

ez egy parabola egyenlete.