Dinamika – egy kis emlékeztető

Newton-axiómák + erőtörvény → mozgásegyenlet

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

erőtörvény: $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$

így a mozgásegyenlet egy 3 (N részecskére 3N) változós, csatolt, másodrendű differenciálegyenlet rendszer:

$$m\ddot{x} = F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$

megoldásához 6 (6N) kezdeti feltétel szükséges:

pl. $t=t_0$-ban $\underline{r}(t_0) = \underline{r}_0$, $\dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}_0$

- ezt előadáson láttuk: konstans erő esetére (mozgásegyenletet 2× integrálva 6 db integrálási állandó jelent meg, azok rögzítéséhez kellenek a kezdő feltételek
- az ottani módszer $\underline{F} = \underline{F}(t)$-re is megy

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \qquad \dot{\underline{r}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. áll.}}}{\dot{\underline{r}}(0)} + \int_{t_0}^{t} \underline{F}(t')dt' \qquad \underline{r} = \underset{\uparrow}{\underline{r}(0)} + \dot{\underline{r}}(0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'} \underline{F}(t'')dt''dt'$$

- 6 (ill. 6N) kérdés feltétel szükségessége általánosan is igaz (ld. differenciálegyenletek elmélete)

Mozgásegyenletek megoldása nehéz feladat – ha valamilyen tulajdonságát a megoldásnak előre ki tudjuk találni, az sokat segíthet.

Egy fontos mennyiség: kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 = \frac{1}{2} m(\dot{\underline{r}})^2$$

mennyi ennek a megváltozása?

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2\right) = m \ddot{\underline{r}} \dot{\underline{r}}$$

itt a mozgásegyenletet felhasználjuk: $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

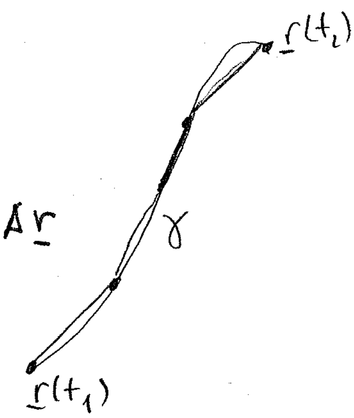
$$\dot{T} = \frac{d}{dt} T = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}}$$

ezt az egyenletet integráljuk t_1-től t_2-ig

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{T}\, dt' = T(t_2) - T(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, \dot{\underline{r}}\, dt = \int_{\gamma} \underline{F}\, d\underline{r} = \lim \sum \underline{F} \cdot \Delta \underline{r} = A$$

(munka)



amit kaptunk, az a munkatétel:

$$T(t_2) - T(t_1) = A \qquad \Delta T = A$$

a kinetikus energia megváltozása a munka

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t)\, dt$$

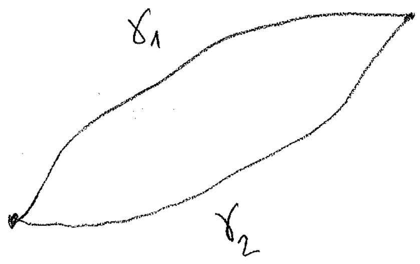
speciális erő fajták:

- $\underline{F}$ lehet, hogy az időtől explicite nem függ

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)) \qquad \text{(autonóm rsz.)}$$

mostantól ilyenekkel fogunk foglalkozni.

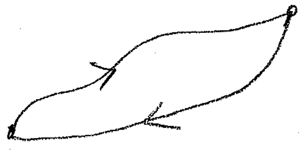
- előfordulhat, hogy a végzett munka csak a pálya kezdő és végpontjától függ (konzervatív erő)



azaz

$$\int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{r}$$

ha a γ_1, γ_2 görbék végpontja azonos; jelölje ekkor a γ azt a zárt görbét, amit úgy kapunk, hogy végigmegyünk γ_1-en, majd γ_2-n visszafelé



ha $\int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{r}$

akkor $\int_{\gamma} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{r} - \int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{r} = 0$

azaz, ha az $\underline{F}$ erő konzervatív, akkor minden zárt γ görbére $\int_{\gamma} \underline{F}\, d\underline{r} = 0$

Stokes-tv: jelölje Σ ("szigma") a γ által körbezárt felületet,

$$\int_{\gamma} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\Sigma} (\text{rot}\, \underline{F})\, d\underline{f}$$

$d\underline{f}$: felületelem

$d\underline{f}$

felületre merőleges

tehát: ha $\operatorname{rot} \underline{F} = 0$, akkor az erő konzervatív (egyszeresen összefüggő tartományon)

1. <u>Feladat</u> mutassuk meg, hogy ha az erő potenciálos, azaz, ha van olyan ϕ függvény, hogy

$$\underline{F} = -\operatorname{grad} V$$

akkor konzervatív: $\operatorname{rot} \underline{F} = 0$

<u>Megoldás:</u> a rotáció lineáris, a "–" nem fontos, elég, hogy tetsz. ϕ-re

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$$

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} \qquad \text{indexesen: } (\operatorname{grad}\phi)_i = \partial_i \phi$$

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} \qquad (\operatorname{rot} v)_i = \varepsilon_{ikl} \partial_k v_l$$

így

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z \phi - \partial_z \partial_y \phi \\ \partial_z \partial_x \phi - \partial_x \partial_z \phi \\ \partial_x \partial_y \phi - \partial_y \partial_x \phi \end{pmatrix} \qquad (\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi)_i = \varepsilon_{ikl} \partial_k \partial_l \phi$$

Young-tétel: $f(x, y)$ kétváltozós fv.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

így $\partial_y \partial_z \phi = \partial_z \partial_y \phi$, stb. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$

itt:

$$\varepsilon_{ikl} = -\varepsilon_{ilk}$$

$$\partial_k \partial_l \phi = \partial_l \partial_k \phi$$

$$\varepsilon_{ikl} \partial_k \partial_l \phi = -\varepsilon_{ilk} \partial_k \partial_l \phi = -\varepsilon_{ilk} \partial_l \partial_k \phi = -\varepsilon_{ikl} \partial_k \partial_l \phi$$

(átbetűzve)

valami = –valami ⇒ ... = 0 ⇐

"konzervatív" = megőrző – mit őriz meg?

a teljes mechanikai energiát:

$$E = T + V$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \qquad \underline{F} = -\operatorname{grad} V$$

ekkor

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V\right) =$$

$$= m \underline{\ddot{r}}\, \underline{\dot{r}} + (\nabla \underline{V})\, \underline{\dot{r}}$$

a mozgásegy.-et felhasználva $m\underline{\ddot{r}} = \underline{F} = -\nabla V$

$$= (-\nabla V) \cdot \underline{\dot{r}} + \nabla V \cdot \underline{\dot{r}} = 0$$

tehát E = áll.

Hogyan döntjük el egy erőről, hogy konzervatív-e?
Kiszámoljuk a rotációját.

2. Feladat

Konzervatív-e az

(a) $\underline{F}(\underline{r}) = F_0\, \underline{r}$

(b) $\underline{F}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{A}$ erő?

Megoldás:

(a:) $$\underline{F} = F_0\, \underline{r} = \begin{pmatrix} F_0 x \\ F_0 y \\ F_0 z \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\, F = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

minden komponens csak az ugyanolyan indexü koordinátától függ $\rightarrow$ ez potenciálos erő

Mi a potenciál?

a munkatételből:

$$T(t_2) - T(t_1) = A = \int_\gamma \underline{F}\, d\underline{r}$$

energiamegmaradás:

$$T(t_1) + V(t_1) = T(t_2) + V(t_2)$$

$$\Rightarrow \quad T(t_2) - T(t_1) = V(t_1) - V(t_2)$$

$$= V(\underline{r}_1) - V(\underline{r}_2)$$

a potenciálnak csak a gradiense számít – konstans elhagyható

$$V(\underline{r}) = -\int_{r_0}^{\underline{r}} \underline{F}\, d\underline{r}$$

az integrálási út tetszőleges (az eredmény független)

$$\underline{F} = F_0\, \underline{r}$$

legyen az út egyenes, $\underline{r}(t) = \underline{v}_1 \cdot t$

és $\underline{r}_0$ legyen az origó

$$V(\underline{r}_1) = -\int_0^{\underline{r}_1} \underline{F}\cdot d\underline{r}' = -\int_0^1 \underline{F}\cdot \underbrace{\underline{r}_1\cdot dt}_{d\underline{r}'}$$

$$F(\underline{r}) = F_0\cdot\underline{r} \qquad \underline{r} = \underline{r}_1\cdot t$$

tehát

$$V(\underline{r}_1) = -\int_0^1 \underbrace{F_0\cdot\underline{r}_1\cdot t}_{\underline{F}}\cdot\underbrace{\underline{r}_1\cdot dt}_{d\underline{r}} =$$

$$= -F_0\cdot\underline{r}_1^2 \underbrace{\int_0^1 t\cdot dt}_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}F_0\, r_1^2$$

vagy átjelölve:

$$V(\underline{r}) = -\frac{1}{2}F_0\, r^2$$

(de persze $V(r) = \frac{1}{2}F_0 r^2 + c$ tetsz. c állandóval jó)

ellenőrzés :

$$-\nabla V(\underline{r}) = ?$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{2}F_0\left(x^2+y^2+z^2\right)\right] = -F_0\cdot x$$

hasonlóan $\frac{\partial V}{\partial y} = F_0 y \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = F_0 z$

tehát $-\nabla V(\underline{r}) = +\begin{pmatrix} F_0 x\\ F_0 y\\ F_0 z\end{pmatrix} = +F_0\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = F_0\underline{r} = \underline{F}(\underline{r})$

valóban jól számoltunk.

(b.)

$$\underline{F}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{A} = \begin{pmatrix} y \cdot A_z - z A_y \\ z A_x - x A_z \\ x A_y - y A_x \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } F = \begin{pmatrix} \partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z \\ \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x \\ \partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -A_x - A_x \\ -A_y - A_y \\ -A_z - A_z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = -2\underline{A} \neq 0$$

ez a vektor nem rotációmentes $\Rightarrow$ az általa megadott erő nem potenciálos.