1.) Határozzuk meg az alábbi függvények gradiensét!

a.) $\phi(\underline{r}) = r = |\underline{r}|$

b.) $\phi(\underline{r}) = f(r)$ ahol f tetsz. egyvált. fv.

Megoldás:

a.) $\phi(\underline{r}) = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial \phi(\underline{r})}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \underbrace{\frac{\partial (x^2+y^2+z^2)}{\partial x}}_{2x} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

a másik kettő teljesen hasonlóan:

$$\operatorname{grad}\phi(\underline{r}) = \nabla\phi(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\underline{r}$$

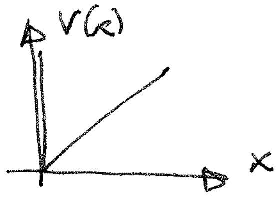
b.) szintén összetett fv. deriváltja

$$\frac{\partial \phi(\underline{r})}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r) \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{\frac{1}{r}x \text{ az előzőből}} = \frac{f'(r)}{r} x$$

azaz

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f'(r) \frac{\underline{r}}{r}$$

2.) Elemi úton oldjuk meg a $V(x) = \begin{cases} F_0 x & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$ potenciálban való mozgás problémáját!



Megoldás:

erő: $F = -V'(x) = -F_0$ állandó, balra ható erő

$$m\ddot{x} = -F_0$$

ugyanolyan, mint a gravitációs térben való mozgás (a Föld felszínén $F_0 = mg \approx$ áll.)

a megoldás 2 integrálással:

$$\dot{x} = -\frac{F_0}{m} t + v_0$$

$t=0$-ban $x=0$-ban (feltehető, periódusidőt számolunk)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

ekkor az energiamegmaradásból kifejezve (itt $V=0$)

a teljes megoldás így

$$\dot{x} = -\frac{F_0}{2m} t^2 + v_0 t$$

egy perióduson belül! Visszapattanás nincs figyelembe véve. Periódusidő: $2\times$ az az idő, amíg felfelé megy (ugyanannyi idő alatt jön lefelé, mint fel)

$\dot{x} = 0$-kor $\quad t = \frac{v_0 m}{F_0} = \frac{m}{F_0}\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad T = 2t = \frac{2m}{F_0}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{\sqrt{8Em}}{F_0}$

tényleg az, ami a múltkor kijött.

3) Vezessük le elemi úton a körpálya adatai közötti összefüggéseket!

Megoldás: gravitációs tér

erő: $\underline{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \underline{e}_r$

egyenletes körmozgásnál a centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = r \omega^2$$

és más gyorsulás nincs is:

$$\underline{a} = -a_{cp} \cdot \underline{e}_r = -r\omega^2 \underline{e}_r$$

a Newton-törvényből:

$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m} M}{r^2} = \cancel{m} r \omega^2$$

$$r^3 \omega^2 = \gamma M$$

periódusidővel: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

4) a Földpálya adataiból számoljuk ki a Nap tömegét!

Megoldás: az előbbit átrendezve:

$$M = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{r^3}{T^2}$$

$r = 150$ mió km $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

$T = 1$ év $= 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60^2$ s $= 3{,}16 \cdot 10^7$ s

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $(m/kg)^2$ $\quad 4\pi^2 = 39{,}48$

értékkel az adatokkal

$$M \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

táblázati adat : $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg – egész jó!

5.) Határozzuk meg azt a kezdősebességet, amivel egy tárgyat egy M tömegű, R sugarú égitest felszínéről eldobva, az elhagyja az égitest gravitációs terét! (szökési sebesség)

Megoldás :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r) = \text{áll.}$$

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$$

az égitest felszínén : $r = R$; elhagyta: r olyan nagy, hogy $V(r)$ már elhanyagolható ; $r \sim$ nagyon nagy ; $r \to \infty$

az energia megmarad :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{R} = E = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

épp elhagyja: ha $v_\infty = 0$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}}$$

azt is látjuk, hogy a múltkori számolásnak megfelelően

$$v < v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \quad \text{nem jut el a végtelenbe} \quad E < 0$$

$$v \geq v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \quad \text{eljut} \quad E \geq 0$$

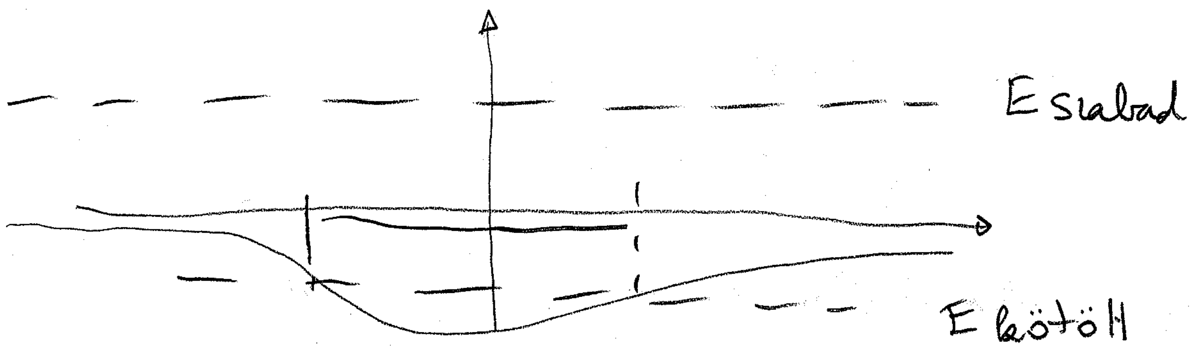
ha olyan potenciálunk van, hogy $V(r) \leq 0$ és $r \to \infty$ $V(r) \to 0$

akkor általánosan is igaz, hogy

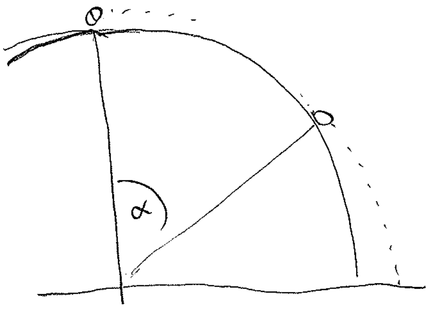
$E < 0$ kötött

$E > 0$ szabad

ugyanis, mint azt a múltkor láttuk, a részecske azon a térrészen mozoghat, ahol $E > V(x)$



6.) Példa kényszererő számolására:



Egy félkör keresztmetszetű lejtő tetejéről elhanyagolható kezdősebességgel lecsúszik egy kis méretű test.
Határozzuk meg, hogy hol hagyja el a lejtőt!

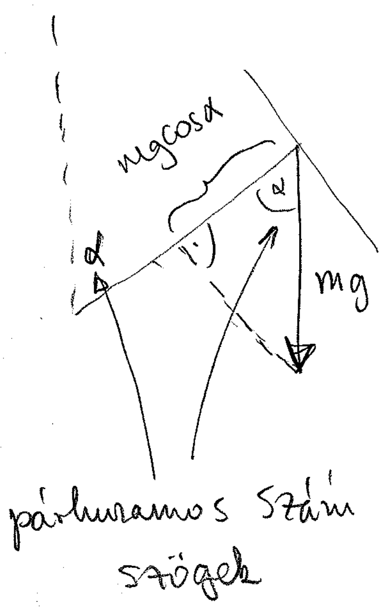
Megoldás: a lejtőt ott hagyja el, ahol a kényszererő nullává válik. A kényszererőt a centripetális gyorsulás ismeretében már könnyű meghatározni, hiszen a kényszererő a felületre merőleges. Ezért először határozzuk meg a test sebességét a sugárnak a függőleges tengellyel bezárt szöge(α) függvényében! Energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\alpha = mgR \quad \text{(energia kezdetben)}$$

innen:
$$v^2 = 2gR(1-\cos\alpha)$$

a centripetális gyorsulás:
$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\alpha)$$

mozgásegyenlet lejtőre merőleges komponense:



$$m \cdot a_{cp} = mg\cos\alpha + K \qquad K\text{: kényszer}$$

a kényszer 0, ahol

$$a_{cp} - g\cos\alpha = 0$$

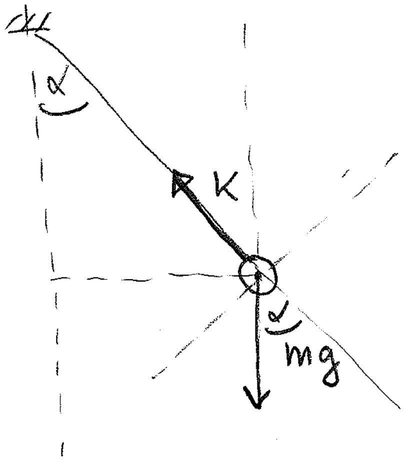
$$2g - 3g\cos\alpha = 0$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{2}{3}}$$

7.) Ingamozgás, gömbi inga

a síkinga leírása:

ERRE MÁR NEM VOLT IDŐ



$$m \cdot a_{cp} = K - mg\cos\alpha$$

$$m \cdot a_{tg} = -mg\sin\alpha$$

kis kitérések: $\sin\alpha \approx \alpha$

$$a_{tg} = l\ddot{\alpha}$$

$$ml\ddot{\alpha} \cong -mg\alpha$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\alpha \Rightarrow \alpha = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

kényszererő meghatározása:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\dot{\alpha})^2}{r} = r\dot{\alpha}^2.$$

ezt kell a radiális irányú mozgásegyenletbe behelyettesíteni

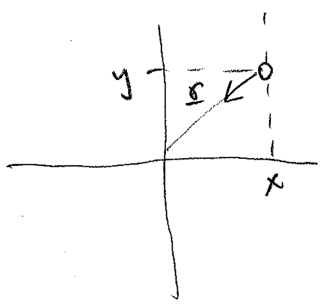
$$K = m \cdot a_{cp} + mg\cos\alpha = mr\dot{\alpha}^2 + mg\cos\alpha$$

<u>Gömbi inga</u>:

az előző alapján megsejtjük, hogy a kis kitérésekre érvényes egyenlet

$x \approx l\alpha$ volt ott

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}$$



felülnézet

így most:

$$m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}x$$

$$m\ddot{y} = -m\frac{g}{l}y$$

egyszerűsítve:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y$$

$$x = X\cos(\omega t + \varphi_x) \qquad \omega = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$y = Y\cos(\omega t + \varphi_y)$$

deriváltak:

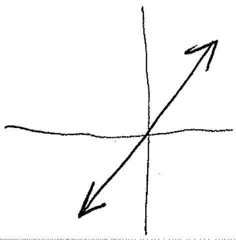
$$\dot{x} = -X\omega \sin(\omega t + \varphi_x)$$

$$\dot{y} = -Y\omega \sin(\omega t + \varphi_y)$$

lehetséges lengések:

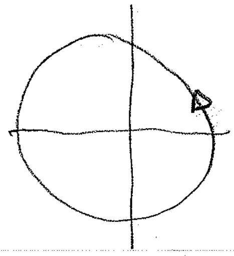
$X \neq 0$

$Y = 0$



$X \neq 0 \quad Y \neq 0$

$\varphi_x = \varphi_y$



$X \neq 0 \quad Y \neq 0$

$\varphi_y = +\frac{\pi}{2}$

Hogy kell ezekhez meglökni?

pl. kitérítem x irányban és

y irányban kezdősebességet adok

→ harmadik ábra