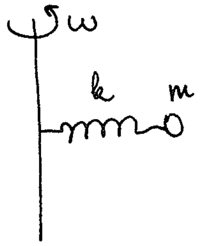
HF 3.



egyensúlyi $\Delta l = ?$

rugó nyugalmi hossza l_0

Megoldás: a mozgásegyenlet radiális komponensét írjuk fel:

$$m \cdot a_{cp} = F_{rugó}$$

centripetális gyorsulás: $a_{cp} = r\omega^2$

rugóerő: $F_{rugó} = k \cdot \Delta l$

$$r = l_0 + \Delta l$$

ezt beírva kapjuk:

$$m(l_0 + \Delta l)\omega^2 = k\Delta l$$

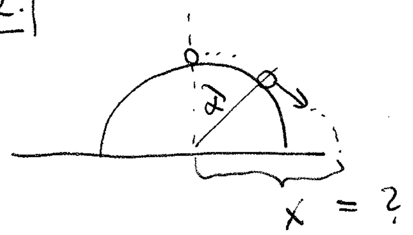
ahonnan

$$\Delta l = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

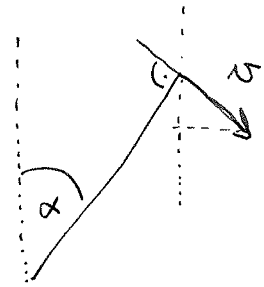
$$r = l_0 + \Delta l = l_0 + \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

- ha $m\omega^2 > k$, akkor $\Delta l < 0$, és $|\Delta l| > l_0$ adódik: a rugót összenyomni kellene, egészen a tengely túloldalára → ez nem értelmes
- tehát, ha $m\omega^2 > k$, akkor a rugó "a végtelenségig nyúlik" (valójában elszakadásig, vagy ahol már nem lin.)

HF2.



hol ér földet?



Megoldás: gyakorlaton kiszámoltuk a múltkor $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ -nál hagyja el a lejtőt

sebessége energia megmaradásból

$$v = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

iránya: α -t zár be a vízszintessel, lefelé

$$v_x = v\cdot\cos\alpha = \frac{2}{3}v = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

$$v_y = -v\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}v = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gR}$$

ez a test függőlegesen lefelé egyenletesen gyorsul

$$x(t) = x_0 + v_x t \qquad x_0 = R\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}R$$

$$y(t) = y_0 + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad y_0 = R\cos\alpha = \frac{2}{3}R$$

($t=0$: amikor elhagyja a lejtőt)

a földetérés időpontjában $y(t) = 0$

$$\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gR}\,t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

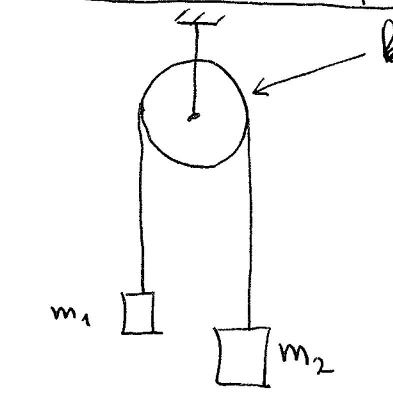
t a pozitív gyök:

$$t = \frac{\sqrt{138} - \sqrt{30}}{9}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

és így

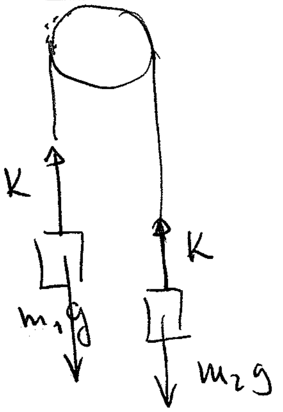
$$x(t) = x_0 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}\,t = \frac{1}{27}\left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23}\right)R \approx 1{,}12458\,R$$

3.) Az Atwood-féle ejtőgép



írjuk le a testek mozgását!

Megoldás

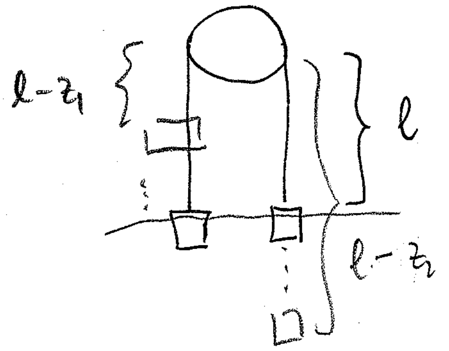


függőleges egyenes mentén mozognak

$$m_1 \ddot{z}_1 = K - m_1 g$$
$$m_2 \ddot{z}_2 = K - m_2 g \qquad (*)$$

K kényszererő — nem meghatározott

ahhoz, hogy K-t ki tudjuk számolni, figyelembe kell venni a kényszerfeltételt



l = kötél hosszának a fele
− a csiga negyedkerülete

a kötél hossza nem változik

$$2l = (l - z_1) + (l - z_2)$$

azaz $\quad z_1 + z_2 = 0$

pl. $\quad z_2 = -z_1 \Rightarrow \ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$

a két (*) egyenlet különbségét véve tehát

$$(m_1+m_2)\ddot{z}_1 = (m_2-m_1)\, g$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\, g$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} g t^2 + \underbrace{\dot{z}_{10}}_{\text{kezdőseb.}} t + \underbrace{z_{10}}_{\text{kezdeti pozíció}}$$

persze ekkor

$$z_2 = -\frac{1}{2}\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} g t^2 + \underbrace{\dot{z}_{20}}_{-\dot{z}_{10}} t + \underbrace{z_{20}}_{-z_{10}}$$

a kényszererő számolása: ezt pl. z_1 egyenletébe visszatéve

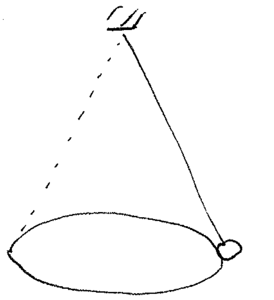
$$m_1 \ddot{z}_1 = K - m_1 g$$

$$m_1 \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\, g = K - m_1 g$$

$$m_1 g \underbrace{\left(1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)}_{\frac{2m_2}{m_1+m_2}} = K$$

$$\boxed{K = \frac{2 m_1 m_2}{m_1+m_2}\, g}$$

4) Kúpinga

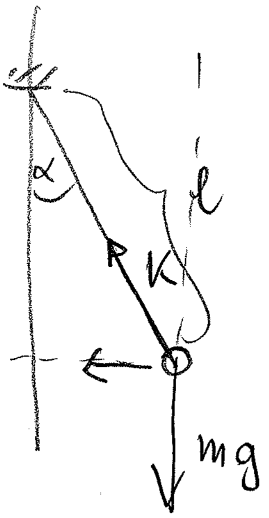


a test körö kering

$\omega = ?$

Megoldás:

a mozgásegyenlet radiális részét fogjuk felírni a végén



függőleges komponenssel kezdjük:

függőleges irányban nincs gyorsulás

$$0 = K \cdot \cos\alpha - mg$$

$$\Downarrow$$

$$K\cos\alpha = mg$$

$$K = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

radiális: $a_{cp} = r\omega^2$

$$mr\omega^2 = K \cdot \sin\alpha$$

$$mr\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \sin\alpha$$

$$r = l \sin\alpha$$

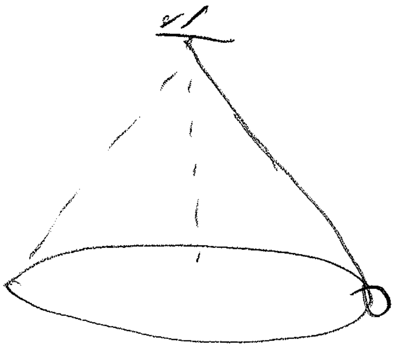
$$\cancel{m} l \omega^2 \cancel{\sin\alpha} = \frac{\cancel{m}g}{\cos\alpha} \cancel{\sin\alpha}$$

ha α elég kicsi $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$

$$\frac{1}{\cos\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$ α^2-et elhagyjuk

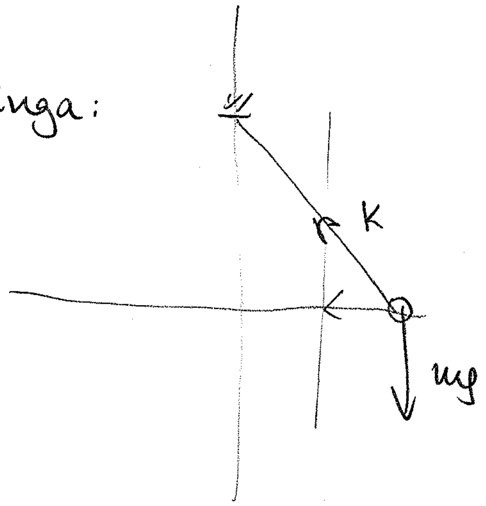
$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

5.) Gömbi inga – írjuk le egy l hosszú kötélen lógó test mozgását! Milyen kezdőfeltétellel kell indítani, hogy körpályán mozogjon, mint az előző feladatban?

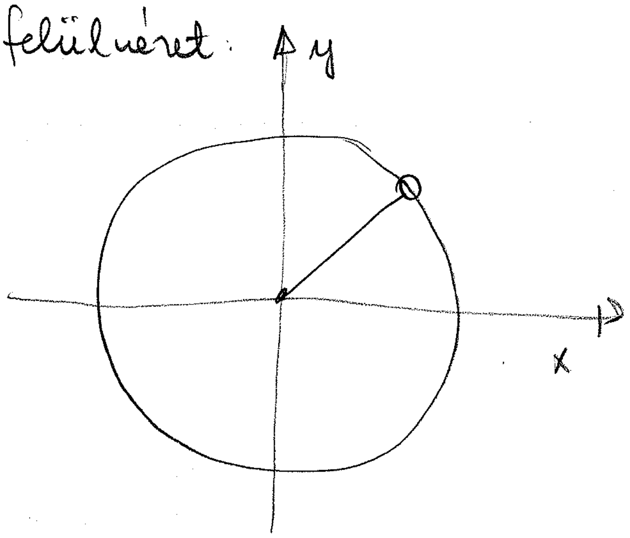


<u>Megoldás</u>:

síkinga:



felülnézet:



az előzőhöz hasonlóan a visszatérítő erő

$$F_v = \frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \cancel{\frac{\alpha^2}{2}} + \dots \qquad \sin\alpha \approx \alpha - \cancel{\ }$$

$$F \approx mg \cdot \alpha \approx mg \frac{x}{l}$$

---

a gömbingától ez csak abban különbözik, hogy 1 irányban mozog – de mindig beforgathatnánk a koordinátarszt-t úgy, hogy x irányban legyen kitérítve

– a lényeges jellemző:
→ a kitéréssel ellentétes irányú
→ arányossági tényező $\frac{mg}{l}$

a visszatérítő erő tehát

$$F_x = -\frac{mg}{\ell} x$$

$$F_y = -\frac{mg}{\ell} y$$

mozgásegyenlet:

$$\cancel{m} \ddot{x} = -\frac{\cancel{m}g}{\ell} x$$

$$\cancel{m} \ddot{y} = -\frac{\cancel{m}g}{\ell} y$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell} x$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{\ell} y$$

a megoldást ismerjük: mind a kettő harmonikus rezgés

$$x = X \cos(\omega t + \varphi_x) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$y = Y \sin(\omega t + \varphi_y)$$

körpálya:

$$x = R\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \dot{x} = -R\omega \sin(\omega t)$$

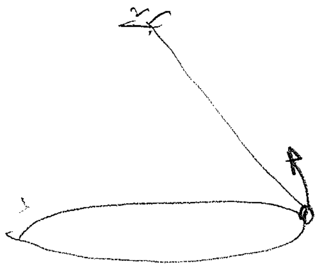
$$y = R\sin(\omega t) = R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \dot{y} = R\omega \cos(\omega t)$$

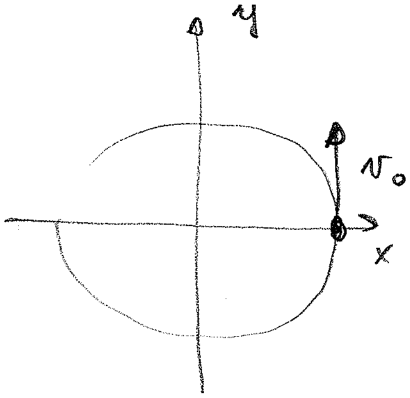
kezdeti feltételek — hogyan indítjuk:

$t = 0$ $\quad x(t=0) = R \quad \dot{x}(t=0) = 0$

$\quad y(t=0) = 0 \quad \dot{y}(t=0) = R\omega$

Rajz:





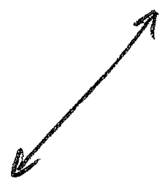
ekkor $\varphi_x - \varphi_y = \frac{\pi}{2}$

általában:

R kitérés
valamilyen irányban
és rá merőlegesen
Rω
sebesség a körpályához

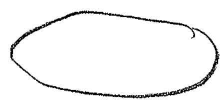
általános:

$A_y = 0$



$A_x = A_y$

$\varphi_x = \varphi_y$



$A_x \neq A_y$

$\varphi_x - \varphi_y = \frac{\pi}{2}$