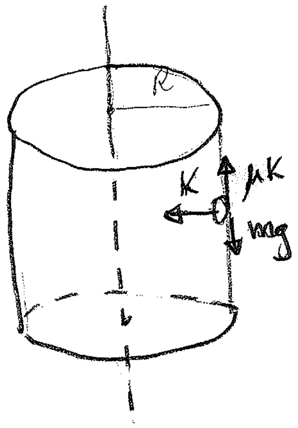
1.)



a.) mozgásegyenlet függőleges komponenséből, ha z = áll. (nem csúszik le), $m\ddot{z} = 0$

$$0 = \mu K - mg \Rightarrow K = \frac{mg}{\mu}$$

súrl. erő $\leq \mu K$

μ: tapadási súrlódás

radiális komponens: $a_{cp} = \omega^2 r$

$$m\omega^2 r = K$$ és $r = R$ áll. sugár

$$\omega^2 = \frac{K}{mR} = \frac{g}{\mu R}$$

b.) a teljes erő a fal mentén:

$$\underline{F}_{\text{fal által}} = \begin{pmatrix} K \\ \mu K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg/\mu \\ mg \end{pmatrix}$$

$$|F| = mg\sqrt{1 + 1/\mu^2}$$

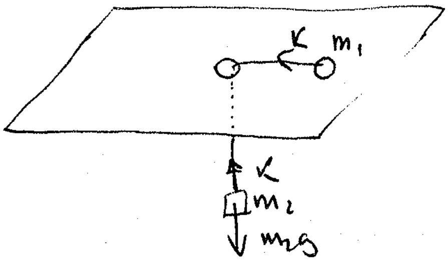
ha azt akarjuk, hogy $|F| \leq 4\,mg$ legyen, akkor kell

$$1 + \frac{1}{\mu^2} \leq 16$$

$$\mu \geq \frac{1}{\sqrt{15}} \approx 0{,}26$$

pl. egy gumilapon lehet ekkora a súrlódás.

2.)



a.)

lent test z ir. mozg. egyenlete

$$0 = K - m_2 g$$

felső test rad. $a_{cp} = \omega^2 r$

$$m_1 \omega^2 r = K$$

az első egyenletből $K = m_2 g$ -t beírva

$$m_1 \omega^2 r = m_2 g \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{g}{r}}$$

b.) a mozgásegyenlet

$$m_2 \ddot{z}_2 = K - m_2 g$$

felső test mozgásegyenlet: polárkoord. felbontás síkban

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\underline{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\underline{e}_\varphi$$

így a radiális rész

$$m_1(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -K$$

tangenciális irányban nem hat erő:

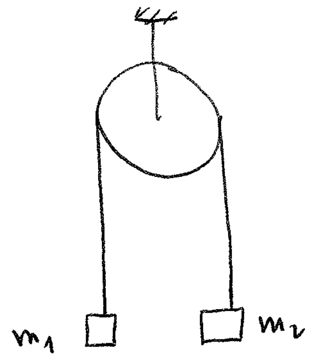
$$m_1(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$$

és a kényszerfeltétel (ha z_2-t onnan mérjük, ahol m_2 van, ha m_1 egészen bemegy középre):

$$z_2 = r$$

3.) Oldjuk meg az Atwood-féle ejtőgép mozgását Lagrange-formalizmusban is!

Megoldás:



$$L = K - V$$

K: kinetikus energia

V: potenciális energia

$$K = K_1 + K_2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 \qquad K_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2$$

$$V_1 = m_1 g z_1 \qquad V_2 = m_2 g z_2$$

kényszerfeltétel: $\quad z_1 + z_2 = 0$

Általános koordináta választása: $\sim$ a kényszerfeltételek megoldása

legyen pl. $\quad q = z_1 \qquad \dot{z}_1 = \dot{q}$

ekkor $\quad z_2 = -q \qquad \dot{z}_2 = -\dot{q}$

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2$$

$$V = V_1 + V_2 = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = (m_1 - m_2) g q$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 - (m_1 - m_2) g q$$

Euler - Lagrange - egyenlet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

ált. impulzus $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = (m_1+m_2)\,\dot q$

ált. erő: $\frac{\partial L}{\partial q} = (m_2-m_1)\,g$

így a mozgásegyenlet

$$(m_1+m_2)\,\ddot q = (m_2-m_1)\,g$$

$$\boxed{\ddot q = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\,g}$$

a múltkor is ezt kaptuk: $q = z_1$

$$\ddot z_1 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\,g$$

persze $\ddot z_2 = -\ddot z_1$

→ A Lagrange - formalizmus előnye, hogy a kényszerfeltételeket az elején, a koordináták alkalmas megválasztásával megoldhatjuk, utána már nincs gondunk a kényszerekkel.

Hátrány: nem tudjuk, hogy mekkora a kényszererő.

4.) Tárgyaljuk a bolygómozgást Lagrange-formalizmusban! ③

Megoldás:

$$L = K - V$$

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$ (síkmozgás, a síkot választjuk $z=0$-nak)

$$V = -\gamma \frac{mM}{r}$$ M: vonzócentrum tömege

általános koordináták választása: r, φ

$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$

így

$$\dot{x} = -r \sin\varphi \, \dot{\varphi} + \dot{r} \cos\varphi$$
$$\dot{y} = r \cos\varphi \, \dot{\varphi} + \dot{r} \sin\varphi$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \gamma \frac{mM}{r}$$

a megoldás módszere: először a szögegyenletet írjuk fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ ciklikus koordináta,}$$

azaz a hozzá tartozó (hozzá konjugált) általánosított (kanonikus) impulzus állandó

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m r^2 \dot\varphi = J_z$$

megkaptuk az impulzusmomentumnak a megmaradását

Radiális mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m \dot r \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m \ddot r$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot\varphi^2 - \gamma \frac{mM}{r^2}$$

$$\dot\varphi = \frac{J_z}{mr^2} \qquad \dot\varphi^2 = \frac{J_z^2}{mr^4} \qquad m r \dot\varphi^2 = \frac{J_z^2}{mr^3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{J_z^2}{mr^3} - \frac{\gamma m M}{r^2}$$

emlékeztető: $V_{eff}(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{J_z^2}{2mr^2}$

$$V_{eff}'(r) = \gamma \frac{mM}{r^2} - \frac{J_z^2}{mr^3} = -\frac{\partial L}{\partial r}$$

az Euler-Lagrange-egyenlet ezzel

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \frac{\partial L}{\partial r} = -V_{eff}'(r)$$

$$\boxed{m\ddot r = -\gamma \frac{mM}{r^2} + \frac{J_z^2}{mr^3}}$$

5.) Minek a Lagrange-függvénye

$$L = e^{\alpha t}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2\right) \quad ?$$

Hamilton-formalizmus?

<u>Megoldás</u>:

Felírjuk az Euler-Lagrange-egyenletet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

a koordináta itt $q = x$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\alpha t} m \dot{x}$$

$$\dot{p} = e^{\alpha t} m \ddot{x} + \alpha e^{\alpha t} m \dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -e^{\alpha t} \underbrace{m\omega_0^2}_{k} x$$

mozgásegyenlet

$$e^{\alpha t} m \ddot{x} + \alpha e^{\alpha t} m \dot{x} + e^{\alpha t} m\omega_0^2 x = 0$$

$e^{\alpha t}$-vel elosztva

$$m\ddot{x} = -\underbrace{\alpha m}_{\beta}\dot{x} - \underbrace{m\omega_0^2}_{k} x$$

csillapított rezgő mozgás

áttérés Hamilton-formalizmusba

$$H = p\dot{x} - L =$$

p-vel ki kell fejezni $\dot{x}$-ot:

$$p = e^{\alpha t} m \dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{1}{m} e^{-\alpha t} p$$

$$H = \frac{e^{-\alpha t}}{m} p^2 - L$$

$$L = e^{\alpha t}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\right)$$

$$\uparrow \frac{1}{m^2} e^{-2\alpha t} p^2$$

$$= e^{-\alpha t} \frac{p^2}{2m} - e^{\alpha t} \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

$$\boxed{H = \frac{e^{-\alpha t}}{2m} p^2 + e^{\alpha t} \frac{m\omega_0^2}{2} x^2}$$