Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2010. április 23.

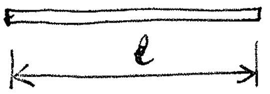
→ Házi feladatok megoldása

→ ZH: kezdés 10:15 hely: 2 54

- 1 db A4-es lap behozható a fontosabb képletekkel
- tematika: minden a koordinátarendszerektől a Lagrange-formalizmusig, Hamilton-függvényig (mozgásegyenletek, 1D mozgások, kis rezgések, centrális potenciál, effektív potenciál)
- a rendelkezésre álló idő: az előadás első fele

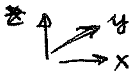
→ Kérdések? Volt-e valami eddig, ami nem világos?

1.) Tehetetlenségi momentum számolása



l hosszúságú pálca

$$\underline{\underline{\Theta}} = \int d^3x \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \varrho(x,y,z)$$

látható, h. ha 

módon vesszük fel a koordinátarendszert, akkor csak az x^2-es tag nem nulla

$$\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \varrho \; dx$$

itt $\varrho = \frac{dm}{dx}$ vonalmenti tömegsűrűség

ennek kiszámítása $\varrho =$ áll. esetén egyszerű

$$\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \varrho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \varrho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = 2\varrho \frac{l^3}{24} = 2 \cdot \frac{ml^2}{24} = \frac{1}{12} ml^2$$

mennyi a tehetetlenségi momentum egy párhuzamosan eltolt tengely körül forgatva? (Steiner-tétel)

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \int d^3x \begin{pmatrix} (y+Y)^2+(z+Z)^2, & -(x+X)(y+Y) & -(x+X)(z+Z) \\ -(x+X)(y+Y) & , (x+X)^2+(z+Z)^2 & -(y+Y)(z+Z) \\ -(x+X)(z+Z) & , -(y+Y)(z+Z) & (x+X)^2+(y+Y)^2 \end{pmatrix} \varrho \, dV$$

$$= \int d^3x \left[\begin{pmatrix} y^2+z^2, & -xy, & -xz \\ -xy, & x^2+z^2, & -yz \\ -xz, & -yz, & x^2+y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2yY+2zZ, & -xY-yX, & -xZ-zX \\ -xY-yX, & 2xX+2zZ, & -yZ-zY \\ -xZ-zX, & -yZ-zY, & 2xX+2yY \end{pmatrix} \right.$$

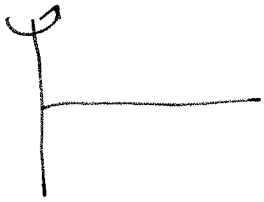
$$\left. + \begin{pmatrix} Y^2+Z^2, & -XY, & -XZ \\ -XY, & X^2+Z^2, & -YZ \\ -XZ, & -YZ, & X^2+Y^2 \end{pmatrix} \right] dV$$

Tömegközéppont: $\int \varrho x \, dV = \int \varrho y \, dV = \int \varrho z \, dV = 0$

így ha az eredet $\underline{\underline{\Theta}}$ a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozik, ezek az integrálok nullák (X, Y, Z konstans)

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \underline{\underline{\Theta}}_{TKP} + m \begin{pmatrix} Y^2+Z^2, & -XY, & -XZ \\ -XY, & X^2+Z^2, & -YZ \\ -XZ, & -YZ, & X^2+Y^2 \end{pmatrix}$$

ez a Steiner-tétel; pl.



$$X = -\frac{l}{2} \qquad Y = Z = 0$$

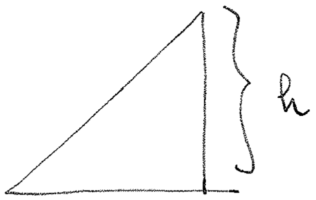
$$\Theta'_{yy} = \Theta'_{zz} = \Theta_{TKPxx} + mX^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

közvetlenül is kiszámolható

$$\Theta'_{yy} = \varrho \int_0^l x^2 \, dx = \varrho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \varrho \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

2.) Golyó legurulása lejtőn



lecsúszó kő: $T + V = \text{áll.}$

$T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad V = mgh$

ha fent $v = 0$ $\qquad v = \sqrt{2gh}$

leguruló golyó: $T + V = \text{áll.}$

$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 \qquad \omega = \frac{v}{R}$ a kényszer, hogy nem csúszik le

$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right) v^2 \qquad V = mgh$

$v = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Theta}{mR^2}}}$ lassabb!

gömb esetén $\Theta = \frac{2}{5} m R^2 \qquad \frac{\Theta}{mR^2} = \frac{2}{5}$

$v = \sqrt{2gh \, \frac{5}{7}} \qquad \sqrt{\frac{5}{7}} \approx 0{,}8452$