Házi feladatok megoldása, 9. feladatsor

1. $L = L(q_i, \dot{q}_i; \lambda)$ $\qquad \lambda$ paraméter

def. szerint

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i(q_i, p_i; \lambda) - L(q_i, \dot{q}_i(q_i, p_i; \lambda), \lambda)$$

ahol $\dot{q}_i(q_i, p_i; \lambda)$ jelentése: λ rögzített értéke mellett a $\dot{q}_i$ általánosított sebességkomponenseket kifejezzük a q_i, p_i kanonikus változókkal. Ekkor, az összetett fvek deriválási szabálya szerint

$$\frac{\partial H(q_i, p_i; \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i(q_i, p_i; \lambda)}{\partial \lambda}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, \lambda)}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(q_i, p_i; \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial L}{\partial \lambda}$$

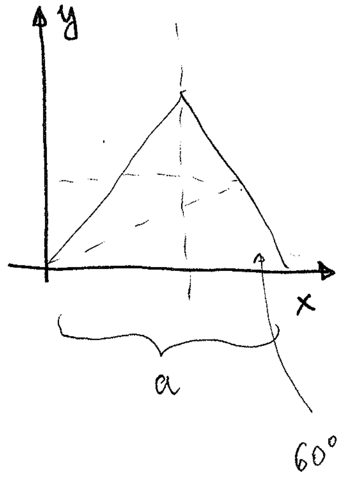
vegyük észre, hogy $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, így az első két tag éppen kiejti egymást, kapjuk tehát:

$$\frac{\partial H(q_i, p_i; \lambda)}{\partial \lambda} = - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i; \lambda)}{\partial \lambda}$$

azaz éppen azt, amit bizonyítani kellett.

②

a.)



TKP helye

a tömegközéppont helyét szimmetriaokokból is meghatározhatjuk (szögfelezők metszéspontja)

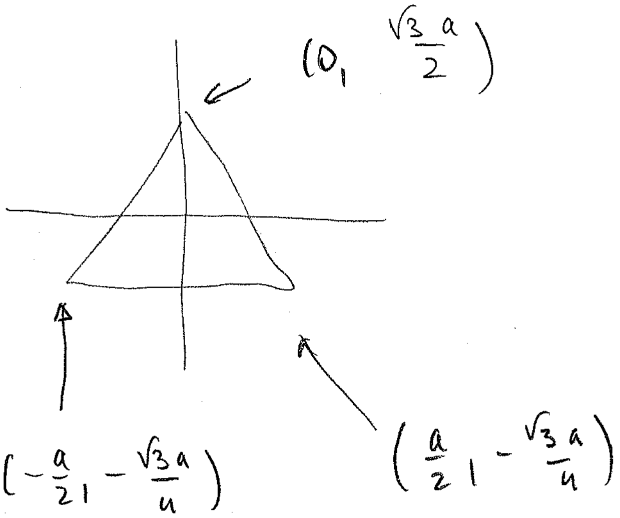
$$x_0 = \frac{a}{2}$$

$$y_0 = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

b.) a szimmetria miatt a tehetetlenségi momentum tenzor

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix}$$ alakú, $\Theta_1 = \Theta_2$

tkp. koord. rsz



erre kell integrálni, pl.

Θ_3 esetén x^2+y^2-et

Θ_1 esetén: y^2-et $(z^2=0)$

Θ_2 : x^2-et $(z^2=0)$

x^2 és y^2 integrálja:

$$\int_\Delta x^2\,dx\,dy = 2\int_{◿} x^2\,dx\,dy = 2\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-\frac{\sqrt{3}a}{6}}^{y_1} dy\, x^2 = \frac{a^4}{64\sqrt{3}}$$

$$\int_\Delta y^2\,dx\,dy = \frac{a^4}{64\sqrt{3}}$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}a}{6} + \sqrt{3}\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\eta a^4}{64\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\Theta_3 = \frac{\eta a^4}{32\sqrt{3}}$ $\qquad$ η: felületi tömegsűrűség

c.) Steiner-tétel

3.) Tkp-re ismert (pl. wikipedia)

alap átmérője: Steiner-tétel