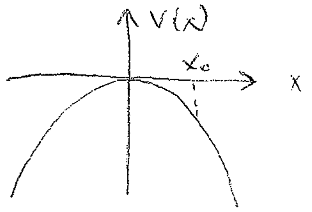
1.) A $-ax^4$ potenciál $(a>0)$



$$V(x) = -ax^4$$

energiamegmaradás $\quad K + V = E = \text{áll.}$

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$$

vizsgáljuk meg speciálisan a nulla összenergiájú mozgást: $E=0$

$$\frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - a x^4 = 0$$

innen $\quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2a}{m}}\, x^2$

a) Mozgás "balra": $\quad \dot{x} < 0$, x_0 pontból indítva:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\sqrt{\frac{2a}{m}}\, x^2$$

$$\frac{dx}{x^2} = -\sqrt{\frac{2a}{m}}\, dt$$

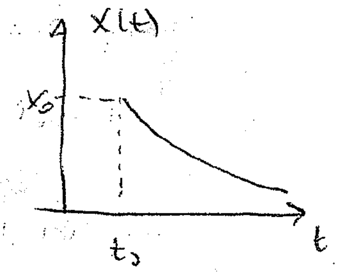
$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = -\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{2a}{m}}\, dt' = -\sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t-t_0)$$

$$\| $$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

ahonnan

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t-t_0)}$$



Mikor válik $x(t)$ nullává? Ha $t \to \infty$! Nagy t-re $\frac{1}{x_0}$ elhanyagolható: $\quad x(t) \sim \sqrt{\frac{m}{2a}}\, \frac{1}{t}$

b.) "jobbra" $v_0 > 0$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2a}{m}} \; x^2$$

az egyenletet az előbbi eset mintájára

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t-t_0)}$$

Mikor válik $x(t)$ végtelenné? Ha a nevező 0:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2a}} \; \frac{1}{x_0} \qquad < \infty$$

A részecske véges idő alatt a végtelenbe távozik.

Tanulság:

a.) eset: a maximum elérése x^4 potenciálban is végtelen sok időbe telik ("éppen elegendő" energia esetén). Érdemes elgondolkozni, hogy ennek mi köze van a diffegyenletek megoldásának unicitásához, és hogy tudunk-e olyan potenciált, ahol nem így van (pl. $-|x|^{3/2}$) és miért?

b.) eset: $-ax^4$ pot. instabil

2.) x^4 potenciál ("mexikói kalap" v. x^2-x^4-pot.)

Az előadáson szerepelt: $V(x) = -V_2 x^2 + V_4 x^4$

Emlékeztető:

$V_2 > 0$ 3 egyensúly: $x = \begin{cases} -x_0 & \text{stabil} \\ 0 & \text{instabil} \\ x_0 & \text{stabil} \end{cases}$

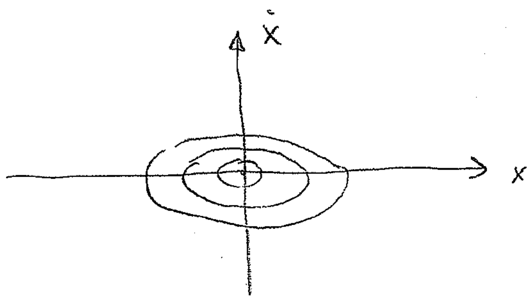
$V_2 < 0$ 1 egyensúly $x = 0$ stabil

$V_2 = 0$ -nál bifurkáció

Vizsgáljuk meg az egyensúlyok körüli kis rezgéseket!

a.) $V_2 < 0$

fázis térkép:



egyensúly: $x = 0$

ekörül a potenciál: $V(x) = \underbrace{-V_2}_{\text{ez poz.!}} x^2 + \ldots$

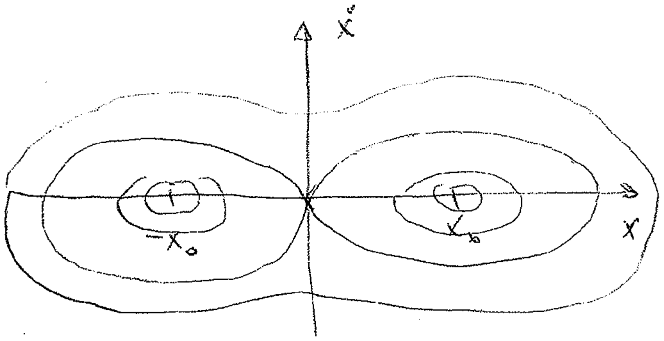
kis rezgések frekv.: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2|V_2|}{m}}$

érdekesség: $V_2 \to -0$ esetén az egyensúly stabilitása elvész

$\omega_0 \to 0$ periódusidő: $T_0 \to \infty$

b.) $V_2 > 0$

emlékeztető: fázisdiagram:



$$x_0^2 = \frac{V_2}{2V_4}$$

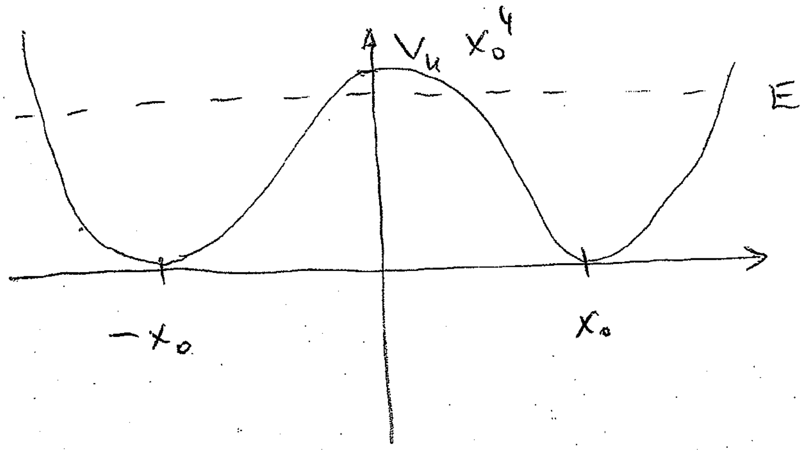
a potenciált teljes négyzetté alakítjuk:

$$V(x) = V_4 \left(x^2 - \frac{V_2}{2V_4} \right)^2 - \frac{V_2^2}{4V_4}$$

$$= V_4 \left(x^2 - x_0^2 \right)^2 - \frac{V_2^2}{4V_4}$$

az energia nullszintjét eltolva, vizsgáljuk inkább a

$$V(x) = V_4 \left(x^2 - x_0^2 \right)^2$$ potenciált



A potenciál sorfejtése az x_0 pont körül

$$V(x) = V_4 (x^2 - x_0^2)^2 \approx V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$V'(x_0) = 2V_4 (x^2 - x_0^2) 2x = 4V_4 (x^2 - x_0^2) x$$

$$V'(x_0) = 0$$

$$V''(x) = 4V_4 (x^2 - x_0^2) + 4V_4 \cancel{(x^2)} \, 2x \cdot x$$

$$= 4V_4 (3x^2 - x_0^2)$$

$$V''(x_0) = 8V_4 x_0^2 = 8V_4 \frac{V_2}{2V_4} = 4V_2$$

Kis rezg. frekv.: $\omega_{x_0} = \sqrt{\frac{4V_2}{m}} = 2\sqrt{\frac{V_2}{m}}$

A bifurkációhoz közelítve:

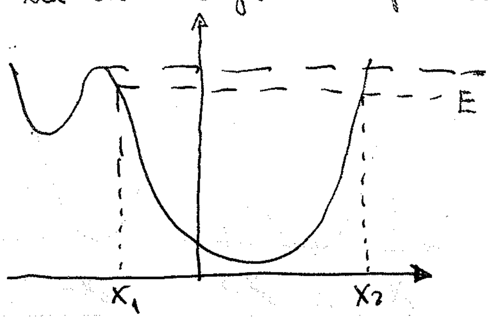
$\cancel{x_0}$ $V_2 \to +0$ -ra $\quad \omega_{x_0} \to 0$

periódusidő: $T_{x_0} \to \infty$

a periódusidő itt is végtelenhez tart!

3.) Mozgás a szeparátrixon

- Számoljuk ki most általános esetben a periódusidőt akkor, ha az energia a potenciál maximumánál csak egy kicsit kisebb!



$V_{max} = V_0$

$$E = V_0 - E_1$$

E_1 kicsi, de pozitív

max közelében

~~$V(x) \approx V_0 - \frac{1}{2}kx^2$~~

$V(x) \approx V_0 - \frac{1}{2}k(x-x^*_k)^2$

Megfordulási pontok: ahol a részecskének csak potenciális energiája van: $V(x_{1/2}) = E = V_0 - E_1$

x_1 esetén: közelítés

$$V_0 - \frac{1}{2}k(x_1-x^*)^2 = E = V_0 - E_1$$

$$x_1 \approx \sqrt{\frac{2E_1}{k}} + x^*$$

ahonnan (előjel az ábra alapján): $x_1 \approx \sqrt{\frac{2E_1}{k}} + x^*$

A periódusidőt a jól ismert

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} = \underbrace{2\int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{\ }}}_{T_1} + \underbrace{2\int_{x_k}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\ }}}_{T_2}$$

formulával számoljuk. Hogy jó közelítést tudjunk kidolgozni, vegyünk fel egy x_k pontot, hogy az $[x_1, x_k]$ intervallumon a potenciált a

$$V(x) \approx V_0 - \frac{1}{2}k(x-x^*)^2$$

parabola jól közelítse. Ha E_1 elég kicsi, akkor $x^* < x_1 < x_k$.

x_1-et is számolhatjuk a parabolából:

vezessünk be új koordinátát:

$$x' = x - x^* \qquad x_k' = x_k - x^*$$

$0 \le x_1 \le x \le x_k'$ tartományt vizsgáljuk $\to$ T_1-et számoljuk

(a T_2 éppolyan, mint az eddigi esetekben, $0 < T_2 < \infty$)

A nevezőt elhagyjuk:

$$T_1 = 2\int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x^*+x)\right)}} \approx 2\int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}x^2 - \frac{2E_1}{m}}}$$

$$V(x^*+x) \approx V_0 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = V_0 - E_1 \qquad E - V(x^*+x) \approx (V_0 - E_1) - (V_0 - \tfrac{1}{2}kx^2)$$
$$= \frac{1}{2}kx^2 - E_1$$

ezen a tartományon $\quad 0 < x \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$

$$T_1 \approx 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_1}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

ahol $\frac{k}{m}a^2 = \frac{2E_1}{m}$

$$a = \sqrt{\frac{2E_1}{k}} = x_1$$

ismert integrál

$$T_1 \cong 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\operatorname{arch}\frac{x}{a}\right] = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\ln\left(x + (x^2 - a^2)^{1/2}\right)\right]_{x_1}^{x_k}$$

ezt kell jól közelíteni

$$\left[\ \right]_{x_1}^{x_k} = -\ln\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{x_k + \sqrt{x_k^2 - a^2}} = -\ln\frac{x_1}{x_k + \sqrt{x_k^2 - a^2}}$$

az alsó közelítése: $a = \sqrt{\frac{2E_1}{k}}$ kicsi (mert E_1 kicsi)

$$\sqrt{x_k^2 - a^2} = x_k\sqrt{1 - a^2/x_k^2} \approx x_k - \frac{a^2}{2x_k}$$

$$\Big[\quad\Big]_{x_1}^{x_k} \approx -\ln x_1 + \underbrace{\ln\left(x_k - a^2/2x_k\right)}_{\text{Taylor-sorfejtés}} \approx$$

$$\approx -\ln x_1 + \underbrace{\ln x_k}_{\text{állandó}} - \underbrace{\frac{a^2}{2x_k^2}}_{\text{kicsi}} \approx -\ln x_1 = -\frac{1}{2}\ln\frac{2E_1}{k}$$

ezzel

$$\underset{E\to V_0}{T(E)} \sim T_1(E) \approx -\cancel{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\ln\frac{2E_1}{k} = -\sqrt{\frac{m}{k}}\ln\frac{2E_1}{k}$$

E_1 kicsi : $\ln\frac{2E_1}{k} \to -\infty$

Tanulság:

- ha a maximum közelében a potenciál (lefelé nyitott) parabolával közelíthető, akkor a potenciálmaximum elérése éppen elegendő energiával a ∞-ba tart
- ha $E \to V_{max}$, akkor a maximum eléréséhez szükséges idő asszimptotikusan

$$T \approx -\sqrt{\frac{m}{k}}\ln 2\frac{V_{max}-E}{k}$$