1.) Fourier-transzformáció

$f(t)$ függvény Fourier-előállítása:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; e^{i\omega t}\,\tilde{f}(\omega)$$

ahol $\tilde{f}(\omega)$ az f Fourier-transzformáltja

$$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{-i\omega t}\, f(t)$$

Vizsgáljuk meg a Fourier-trf. néhány alapvető tulajdonságát!

$$f(t) \longleftrightarrow f(\omega)$$

derivált:

$$f'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; i\omega \; e^{i\omega t}\,\tilde{f}(\omega)$$

azaz $\quad f'(t) \longleftrightarrow i\omega\,\tilde{f}(\omega)$

igaz-e fordítva: $\quad F(t)=\int dt\, f(t) \quad$ (primitív fv.)

$f(t)=F'(t)$

az előzőből: $\quad \boxed{i\omega\,\tilde{F}(\omega) = \tilde{f}(\omega)}$

ahonnan $\quad \tilde{F}(\omega)=\dfrac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega}+\dots$

valami olyan, ami $i\omega$-val szorozva 0-t ad $\to \delta(\omega)$

pl. $\delta(\omega)$

igaz-e, hogy ezek $i\omega$-val szorozva 0-t adnak? igen

Mi lehet akkor $\dfrac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega}$ inverz Fourier-trf-ja?

$F(t)$ + ezek inverz Ft-ja

legyen $\tilde{f}(\omega) = \delta(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega t} \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

legyen $\tilde{f}(\omega) = \delta''(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega t} \delta''(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, it \, e^{i\omega t} \delta'(\omega)$$

$$= + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, (-t^2) \, e^{i\omega t} \, \delta(\omega) = \underline{-\frac{t^2}{2\pi}}$$

stb., ilyen tagokban különbözhet

- Mi a $\delta(t)$ Fourier-transzformáltja?

$$\tilde{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{-i\omega t} \, \delta(t) = 1$$

- Konvolúció: $$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, f(\tau) \, g(t-\tau)$$

mi ennek a Fourier-transzformáltja?

$$\widetilde{(f * g)}(\omega) = \int dt \, e^{-i\omega t} \int d\tau \, f(\tau) \, g(t-\tau) \, d\tau$$

változóhelyettesítés: $t' = t - \tau \qquad dt' = dt \qquad t = t' + \tau$

$$= \int dt' \, e^{-i\omega t'} \, g(t') \int d\tau \, e^{-i\omega \tau} f(\tau)$$
$$= \tilde{f}(\omega) \, \tilde{g}(\omega)$$

2. Alkalmazás: számoljuk ki az oszcillátor Green-függvényét Fourier-transzformációval

előadáson szerepelt:

$$\ddot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t)$$

F.T. $\downarrow$

$$-\omega^2 \tilde{G} + \omega_0^2 \tilde{G} = 1$$

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

hogyan lehet ebből $G(t)$-t kiszámolni?

a nehézség:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\omega_0 + \omega}$$

$\omega = \pm\omega_0$-nál divergál, ez nem egy jól definiált Fourier-transzformált – nézzük meg, meddig lehet eljutni

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \, e^{+i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\omega_0 + \omega} + \frac{1}{\omega_0 - \omega} \right)$$

ezt behelyettesítjük:

$$G(t) = \frac{1}{4\pi\omega_0}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{+i\omega t} \frac{1}{\omega_0+\omega}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{+i\omega t} \frac{1}{\omega_0-\omega}}\right]$$

$\omega' = \omega_0 + \omega$

$d\omega' = d\omega$

$\omega = \omega' - \omega_0$

$$e^{-i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, e^{+i\omega' t}\frac{1}{\omega'} - e^{+i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, e^{+i\omega' t}\frac{1}{\omega'}$$

$\omega' = \omega - \omega_0$

$d\omega' = d\omega$

$\omega = \omega' + \omega_0$

tehát

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi\omega_0}\, i \sin(\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, e^{+i\omega' t}\frac{1}{\omega'}$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega_0}\sin(\omega_0 t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\frac{1}{i\omega'}}_{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\tilde{f}(\omega)}$$

$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega'}$

ha $\delta(t)$-t tekintjük $\tilde{\delta}(\omega) = 1$

$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega}$ $\qquad i\omega\tilde{f}(\omega) = 1 = \delta(\omega)$

$\rightarrow \quad f'(t) = \delta(t)$

$f(t) = \Theta(t)$

a Green-fgv. tulajdonságaiból adódik: konstans eltérés nem lehet

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

3. Green - függvények

diffegyenlet $(Lx)(t) = f(t)$

pl. $(Lx)(t) = \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)$

Green-fgv:

$$(LG)(t) = \delta(t)$$

ekkor $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; G(t-\tau) f(\tau)$$

ugyanis az ~~a~~ L átvihető az integrálon, ott G-re hat

$$(LG)(t) = \delta(t)$$

$$(LG)(t-\tau) = \delta(t-\tau)$$

$$(Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; \delta(t-\tau) f(\tau) = \underline{f(t)}$$

tudjuk, hogy az oszcillátor Green-függvénye

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} \sin(\omega t)$$

alkalmazás:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ f_0 & 0<t<T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} \sin \omega t$$

számoljuk ki az $f(t)$ külső erő hatását:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\, f(t')\, dt'$$

$G(t)$ -ben $\quad \Theta(t)$

$G(t-t') \quad \Theta(t-t') \quad \Rightarrow \quad t' > t$ -re $\; G(t-t') = 0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\, f(t')\, dt'$$

- ha $t<0$: $\quad G(t-t') \neq 0$ -hoz $\; t'<0$ kell, de

  $f(t) = 0 \;\; \forall t<0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \;\; \forall t<0$

- $0<t<T$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\, f(t')\, dt' = \int_{0}^{t} G(t-t')\, f_0\, dt' =$$

$$= \int_0^t \underbrace{\frac{1}{\omega} \sin[\omega(t-t')]\, f_0}_{\frac{d}{dt'} f_0 \cos[\omega(t-t')] \frac{1}{\omega^2}}\, dt' = \left[\frac{1}{\omega^2} f_0 \cos[\omega(t-t')]\right]_{t'=0}^{t'=t}$$

$$= \frac{f_0}{\omega^2}\left[1 - \cos \omega t \right]$$

- $T < t$:

$$x(t) = \int_0^T G(t-t')\, f_0\, dt' = \int_0^T \frac{1}{\omega} \sin[\omega(t-t')] f_0\, dt' =$$

$$= \left[f_0 \frac{1}{\omega^2} \cos[\omega(t-t')] \right]_{t'=0}^{T} =$$

$$= \frac{1}{\omega^2} f_0 \left[\cos[\omega(t-T)] - \cos \omega t \right]$$

Tehát

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 0 \\ \frac{1}{\omega^2} f_0 [1 - \cos \omega t] & \text{ha} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{\omega^2} f_0 [\cos(\omega(t-T)) - \cos \omega t] & \text{ha} \quad t > T \end{cases}$$

4. Határciklus stabilitása

harmonikusan gerjesztett, csillapított oszcillátor

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

ennek előadáson szerepelt egy stacionárius megoldása:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \alpha^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Keressük általános megoldást (perturbáció v. kezdetiérték-prob. megj.)

$$x(t) = \underbrace{A\cos(\omega t + \varphi)}_{x_i(t)} + \delta x$$

(lineáris egyenlet)

$$\ddot{x}_i + \alpha\dot{x}_i + \omega_0^2 x_i = f_0\cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\delta x} + \alpha\dot{\delta x} + \omega_0^2\delta x = 0$$

ennek a megoldásait előadásról ismerjük:

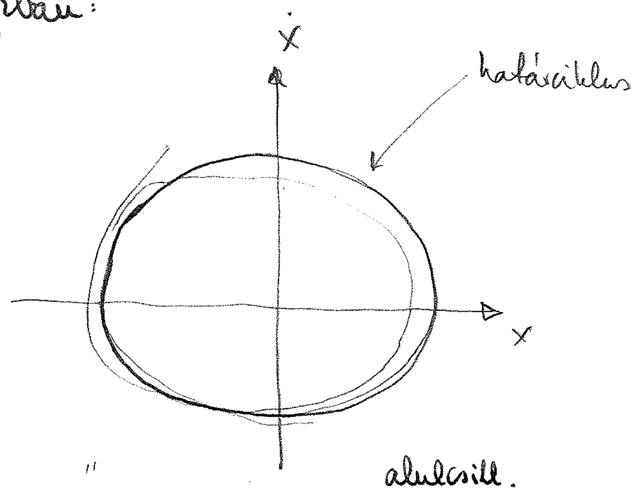
$\frac{\alpha}{2} < \omega_0$ $\quad \delta x = a\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}\sin(\omega_\alpha t + \varphi_0)$ $\quad \omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - (\alpha/2)^2}$

$\frac{\alpha}{2} = \omega_0$ $\quad \delta x = e^{-(\alpha/2)t}(a + bt)$ $\quad$ aperiod. határeset

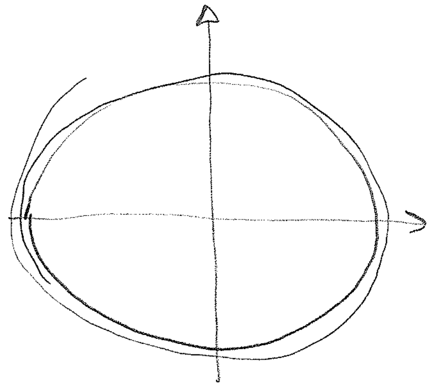
$\frac{\alpha}{2} > \omega_0^2$ $\quad \delta x = a\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}\operatorname{sh}\left(\sqrt{(\alpha/2)^2 - \omega_0^2}\, t\right)$

$$+ b\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}\operatorname{ch}\left(\sqrt{(\alpha/2)^2 - \omega_0^2}\, t\right)$$

vajzban:



" alulcsill.



túlcsillapított

"rátekeredik"

Megj.: az anharmonikus határeset:

$$\ddot x + \omega_0^2 x + \alpha \dot x = 0$$

előadáson szerepeltek a megoldások:

$(\alpha/2) < \omega_0$ $\qquad x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)\, e^{-(\alpha/2)t}$

$(\alpha/2) > \omega_0$ $\qquad x(t) = A\, e^{-(\alpha/2)t}\, ch(\sqrt{\ }\, t) + B\, e^{-(\alpha/2)t} sh(\sqrt{\ }\, t)$

ha $\omega = \frac{\alpha}{2}$: speciális eset (lineáris diffegyenlet: $e^{\lambda t}$ Ansatz, kétszeres gyök λ-ra $\to$ ilyenkor $te^{\lambda t}$ is mego)

$$x(t) = e^{-(\alpha/2)t}\,(a+bt)$$

$$\dot x(t) = -\frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}t}(a+bt) + e^{-\alpha/2\, t}\, b$$

$$\ddot x(t) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 e^{-\frac{\alpha}{2}t}(a+bt) \cancel{+} - \cancel{2}\frac{\alpha}{\cancel{2}}\, e^{-(\alpha/2)t}\, b$$

behely.: leosztás $-\frac{\alpha}{2}t$-vel

$$\underbrace{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2(a+bt) - \alpha b}_{\ddot x} + \underset{\substack{\uparrow \\ (\alpha/2)^2}}{\omega_0^2}(a+bt) + \alpha b - \underset{2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{\alpha^2}{2}}(a+bt)$$

5. Gerjesztett oszcillátor, anharmonikus határeset

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} = f(t)$$

$\alpha/2 = \omega_0$ eset

Green-fv: $\ddot{G} + \omega_0^2 G + \alpha \dot{G} = \delta(t)$

mit tud $G(t)$?

- $t<0$-ra $G(t)=0$ (kauzalitás)
- $t<0$-ra és $t>0$-ra kielégíti a homogén egyenletet
- $-\varepsilon$-tól ε-ig integrálva:

$$\dot{x}(+0) - \dot{x}(-0) + \omega_0^2 \varepsilon G(0) + \alpha\left(\overset{x}{\cancel{G}}(+0) - \overset{x}{\cancel{G}}(-0)\right) = 1$$

feltehetnénk: G a 0-ban folytonos: utolsó tag is eltűnik

$$\dot{x}(+0) = 1$$

ilyen megoldást kell adni

ált. megoldás: $t>0$-ra

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}(a+bt) \qquad \dot{x}(t) = -\frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}t}(a+bt) + e^{-\frac{\alpha}{2}t} b$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\alpha}{2} a + b$$

$$x(0) = a$$

ha $G(0)=0$ $\quad \dot{G}(+0)=1 \quad a=0 \quad b=1$

$G(t) = t\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ $t>0$-ra, és 0 $t<0$-ra

$$\boxed{G(t) = \Theta(t)\, t\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}}$$

6. Anharmonikus rezgés

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3} m\varepsilon x^3$$

mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^2 = 0$$

nulladrend:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

megoldás: $x_0(t) = A\cos(\omega_0 t)$

perturbációszámítás: mint előadáson

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

és $x_0(t) = A\cos(\omega t)$

így $\dot{x}_0(t) = -A\omega\sin(\omega t)$

$$\ddot{x}_0(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2) + \dots$$

ezzel az ε-ban lineáris tagok

$$\ddot{x}_1 \quad - 2 A \omega_0 \omega_1 \cos(\omega t) \quad + k x_1 + \quad x_0^2 (t) = 0$$

$$-4\omega^2 = -4k \qquad\qquad + k \; (=\omega^2) \qquad \uparrow$$

- ne legyen rezonanciatag: $\boxed{\omega_1 = 0}$

- $x_1(t)$: gerjesztett oszcillátor

$$x_1(t) = -\frac{A^2}{2k} + \frac{A^2}{6k} \cos(2\omega t)$$

hiszen

$$x_0^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t) = \frac{A^2}{2} \left(\cos(2\omega t) + 1 \right)$$

ez beírható az ε-ban négyzetes tagok egyenletébe:

$$\ddot{x}_2 - 2 A \omega_0 \omega_2 \cos(\omega t) + k x_2 + 2 A \cos(\omega t) \left(-\frac{A^2}{2k} + \frac{A^2}{6k} \cos 2\omega t \right) = 0$$

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha) = \frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(3\alpha)$$

$$-2 A \omega_0 \omega_2 \qquad \underbrace{-\frac{A^3}{k} + \frac{A^3}{6k}}_{-\frac{5}{6}\frac{A^3}{k}} = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{A^2}{3k\omega_0} = -\frac{5 A^2}{12 \omega_0^3}$$

és persze

$$x_2(t) = \frac{A^3}{16 \omega_0^2} \quad \frac{1}{3 \omega_0^2} \quad \cos(3 \omega t)$$

Megj.: x^3 és x^4 is: korrekciók összeadódnak: $\omega = \left(\frac{3 \varepsilon_2}{8 \omega_0} - \frac{5 \varepsilon_3^2}{12 \omega_0^3} \right) A^2 + \omega_0$